ریاضی 9

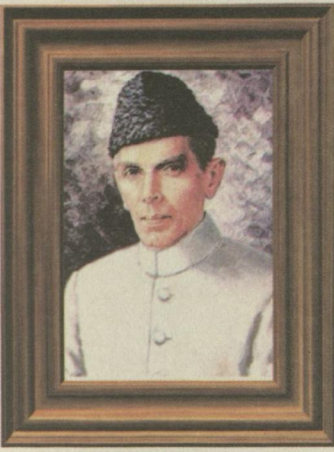
(سائنس گروپ)

یہ کتاب حکومتِ پنجاب کی طرف سے تعلیمی سال 20-2019 کیلئے
پنجاب کے سرکاری سکولوں میں تقسیم کی گئی جیکٹ میں شامل ہے

ناشر: کاروان بک ہاؤس، لاہور

"تعلیم پاکستان کے لیے زندگی اور موت کا مسئلہ ہے۔ دُنیا اتنی تیزی سے ترقی کر رہی ہے کہ تعلیمی میدان میں مطلوبہ پیش رفت کے بغیر ہم نہ صرف اقوامِ عالم سے پیچھے رہ جائیں گے بلکہ ہوسکتا ہے کہ ہمارا نام ونشان ہی صفحۂ ہستی سے مٹ جائے"

قائدِ اعظم محمد علی جناحؒ، بانیِ پاکستان

(26 ستمبر 1947۔ کراچی)

قومی ترانہ

پاک سَرزمین شاد باد   کِشورِ حسین شاد باد

تُو نشانِ عزمِ عالی شان   ارضِ پاکستان

مرکزِ یقین شاد باد

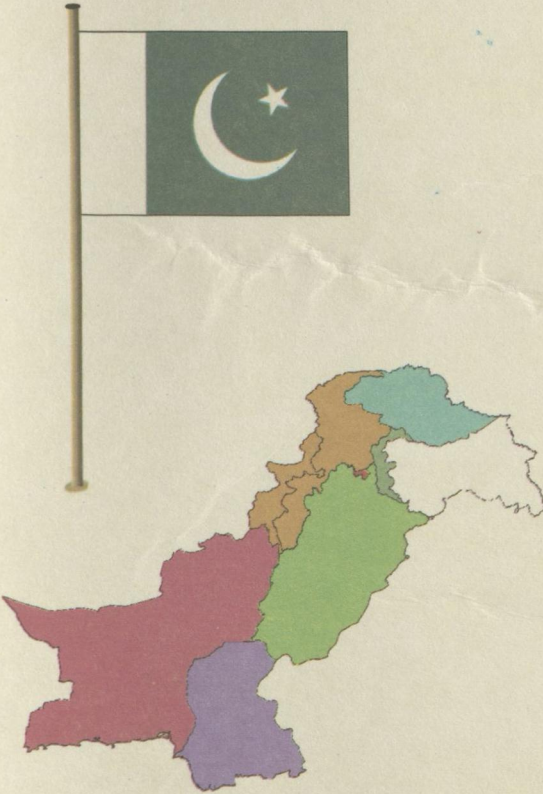
پاک سَرزمین کا نِظام   قُوّتِ اُخوّتِ عوام

قوم ، مُلک ، سلطنت   پایندہ تابندہ باد

شاد باد منزلِ مُراد

پرچمِ ستارہ و ہِلال   رہبرِ ترقّی و کمال

ترجمانِ ماضی، شانِ حال   جانِ اِستقبال

سایۂ خدائے ذُوالجلال

عرضِ ناشر

یہ کتاب قومی نصاب ۲۰۰۶ اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی ۲۰۰۷ کے تحت بین الاقوامی میعار پر تیار کی گئی ہے۔ یہ کتاب حکومت پنجاب کی طرف سے تمام سرکاری سکولوں میں بطور واحد ٹیکسٹ بک مہیا کی گئی ہے۔ اگر اس کتاب میں کوئی تصور وضاحت طلب ہو یا متن اور املا وغیرہ میں کوئی غلطی ہو تو اس بارے ادارے کو آگاہ کریں۔ ادارہ آپ کا شکر گزار ہوگا۔

بِسۡمِ اللّٰہِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ ۝

ترجمہ: ’’شروع اللہ کے نام سے جو بڑا مہربان نہایت رحم والا ہے۔‘‘

ریاضی 9

(سائنس گروپ)

ڈاکٹر کرامت حسین ڈار

پروفیسر عرفان الحق

کاروان بک ہاؤس، لاہور

تاریخ اشاعت	تعداد اشاعت	قیمت
مارچ 2019ء	104,000	138

فہرست

کوآرڈینیٹر: محمد اکرام اللہ

تیار کردہ: کاروان بک ہاؤس، کچہری روڈ، لاہور

بِسۡمِ اللّٰهِ الرَّحۡمٰنِ الرَّحِیۡمِ ۝

ترجمہ: ''شروع اللہ کے نام سے جو بڑا مہربان نہایت رحم والا ہے۔''

ریاضی 9

(سائنس گروپ)

ڈاکٹر کرامت حسین ڈار

پروفیسر عرفان الحق

کاروان بک ہاؤس، لاہور

تاریخ اشاعت	تعداد اشاعت	قیمت
مارچ 2019ء	104,000	138

فہرست

منظور کردہ وفاقی وزارتِ تعلیم (شعبہ نصاب سازی) اسلام آباد، پاکستان۔ بمطابق قومی نصاب 2006 اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی 2007 مراسلہ نمبر F.1-16/2010-Maths مورخہ 2-12-2010 -

کوآرڈینیٹر: محمد اکرام اللہ

تیار کردہ: کاروان بک ہاؤس، کچہری روڈ، لاہور

یونٹ 1

قالب اور قالبوں کا مقطع

(MATRICES AND DETERMINANTS)

یونٹ میں سیکھنے کی اہم حدود (Unit Outlines)

1.1 قالبوں کا تعارف (Introduction to Matrices)

1.2 قالبوں کی اقسام (Types of Matrices)

1.3 قالبوں کی جمع اور تفریق (Addition and Subtraction of Matrices)

1.4 قالبوں کی ضرب (Multiplication of Matrices)

1.5 قالبوں کے جمعی اور ضربی معکوس (Additive and Multiplicative Inverses of Matrices)

1.6 ہمزاد مساواتوں کا حل (Solution of Simultaneous Linear Equations)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج۔ (Students Learning Outcomes)

☆ یونٹ کے نفسِ مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب ہر طالب علم درج ذیل تصورات کو ہو بہو بیان کرنے پر علمی دسترس حاصل کر لے:

- حقیقی ارکان والے قالبوں کی مستطیلی اقسام کا حقیقی عملی زندگی سے حوالہ قائم کرنا۔
- قالب کی افقی اور راسی یا عمودی قطاروں سے حوالے قائم کرنا۔
- کسی بھی قالب کے مرتبہ سے حوالہ قائم کرنا۔
- کسی بھی دیے ہوئے دو قالبوں کے مساوی یا غیر مساوی ہونے کی تصدیق یا تردید کرنا۔

☆ درج ذیل تصورات کی واضح طور پر تعریف کرنا اور ان کی شناخت کو امتیازی حیثیت میں ذہن نشین کرنا:
قطاری قالب (row matrix)، کالمی قالب (column matrix)، مستطیلی قالب (rectangular matrix)، مربعی قالب (square matrix)، صفری قالب (zero/null matrix)، وحدانی قالب یا ضربی ذاتی قالب (unit or identity matrix)، سکیلر قالب (scalar matrix)، وتری قالب (diagonal matrix) وغیرہ۔

دیے ہوئے قالب کے منفی (negative) قالب، ٹرانسپوز قالب (transpose matrix)، ایڈ جائنٹ (adjoint) قالب، سیمٹرک (symmetric) اور سکیو سیمٹرک (skew symmetric) قالب۔

☆ دیے ہوئے قالبوں میں ان کی جمعی اور تفریقی خاصیت کی تصدیق کرنا۔

☆ دیے ہوئے جمعی یا تفریقی قالبوں کو جمع یا تفریق کرنا۔

☆ دیے ہوئے مستطیلی یا مربعی قالبوں کو دیے گئے حقیقی اعداد سے ضرب دینا۔

☆ دیے ہوئے ہم مرتبہ قالبوں کے درمیان جمعی خاصیت مبادلہ (commutative property) اور خاصیت تلازم (associative property) کی تصدیق کرنا۔

☆ جمعی ذاتی قالب کی تعریف کرنا۔

☆ دیے ہوئے مستطیلی اور مربعی قالبوں کے جمعی معکوس معلوم کرنا۔

☆ دیے ہوئے قالبوں کا جمعی اور ضربی حاصل معلوم کرنا۔

☆ قالبوں کے درمیان ضربی خاصیت تلازم کی تصدیق کرنا۔

☆ کسی بھی دو دیے ہوئے ہم مرتبہ قالبوں کے جمعی حاصل کے دائیں یا بائیں ایک ایسے قالب سے ضربی عمل کرنا اور اس کے تقسیمی قوانین کی تصدیق کرنا۔

☆ ایک ایسی مثال لے کر یہ ثابت کرنا کہ قالبوں کے ضربی عمل کا قانون (multiplicative law) عام طور پر خاصیت مبادلہ کا حامل نہیں۔ جیسے (i) $AB \neq BA$ قالب A اور B ہم مرتبہ ہوں (ii) A اور B ہم مرتبہ نہ ہوں مگر ضربی عمل ممکن ہو۔

☆ وحدانی یا ضربی ذاتی (identity) قالب کی تعریف اور پہچان کرنا۔

☆ ضرب دیے ہوئے قالبوں A اور B سے ضربی ٹرانسپوز (transpose) کے قانون کی تصدیق کرنا۔ مثلاً

$$(AB)^t = B^tA^t$$

☆ دیے ہوئے مربعی قالبوں کے مقطع کی تعریف کرنا۔

☆ دیے ہوئے مربعی قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کرنا۔

☆ نادر (singular) اور غیر نادر (non-singular) قالبوں کی مقطع کی مدد سے تعریف اور تصدیق کرنا۔

☆ دیے ہوئے مربعی قالب کے ایڈ جائنٹ (adjoint) کی تعریف کرنا۔

☆ دیے ہوئے مربعی غیر نادر قالب A کا معکوس قالب A^{-1} معلوم کرنا اور تصدیق کرنا کہ: $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

☆ قالب A کے ایڈ جائنٹ کی مدد سے A کا معکوس A^{-1} معلوم کرنا۔

☆ تصدیق کرنا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ جب کہ A اور B غیر نادر قالب ہوں۔

☆ دو ہم زاد مساواتوں کو کسی حقیقی عملی زندگی کے حوالہ سے دو متغیراتی مسئلہ کو باقاعدہ حل کرنا۔

- بذریعہ معکوس قالب کا قانون
- بذریعہ کریمر (cramer) کا قانون

یونٹ 1

قالب اور قالبوں کا مقطع

(MATRICES AND DETERMINANTS)

یونٹ میں سیکھنے کی اہم حدود (Unit Outlines)

1.1 قالبوں کا تعارف (Introduction to Matrices)

1.2 قالبوں کی اقسام (Types of Matrices)

1.3 قالبوں کی جمع اور تفریق (Addition and Subtraction of Matrices)

1.4 قالبوں کی ضرب (Multiplication of Matrices)

1.5 قالبوں کے جمعی اور ضربی معکوس (Additive and Multiplicative Inverses of Matrices)

1.6 ہمزاد مساواتوں کا حل (Solution of Simultaneous Linear Equations)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج۔ (Students Learning Outcomes)

☆ یونٹ کے نفسِ مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب ہر طالب علم درج ذیل تصورات کو ہو بہو بیان کرنے پر علمی دسترس حاصل کر لے:

- حقیقی ارکان والے قالبوں کی مستطیلی اقسام کا حقیقی عملی زندگی سے حوالہ قائم کرنا۔
- قالب کی افقی اور راسی یا عمودی قطاروں سے حوالے قائم کرنا۔
- کسی بھی قالب کے مرتبہ سے حوالہ قائم کرنا۔
- کسی بھی دیے ہوئے دو قالبوں کے مساوی یا غیر مساوی ہونے کی تصدیق یا تردید کرنا۔

☆ درج ذیل تصورات کی واضح طور پر تعریف کرنا اور ان کی شناخت کو امتیازی حیثیت میں ذہن نشین کرنا:
قطاری قالب (row matrix)، کالمی قالب (column matrix)، مستطیلی قالب (rectangular matrix)، مربعی قالب (square matrix)، صفری قالب (zero/null matrix)، وحدانی قالب یا ضربی ذاتی قالب (unit or identity matrix)، سکیلر قالب (scalar matrix)، وتری قالب (diagonal matrix) وغیرہ۔
دیے ہوئے قالب کے منفی (negative) قالب، ٹرانسپوز قالب (transpose matrix)، ایڈجائنٹ (adjoint) قالب، سیمٹرک (symmetric) اور سکیو سیمٹرک (skew symmetric) قالب۔

☆ دیے ہوئے قالبوں میں ان کی جمعی اور تفریقی خاصیت کی تصدیق کرنا۔

☆ دیے ہوئے جمعی یا تفریقی قالبوں کو جمع یا تفریق کرنا۔

☆ دیے ہوئے مستطیلی یا مربعی قالبوں کو دیے گئے حقیقی اعداد سے ضرب دینا۔

☆ دیے ہوئے ہم مرتبہ قالبوں کے درمیان جمعی خاصیت مبادلہ (commutative property) اور خاصیت تلازم (associative property) کی تصدیق کرنا۔

☆ جمعی ذاتی قالب کی تعریف کرنا۔

☆ دیے ہوئے مستطیلی اور مربعی قالبوں کے جمعی معکوس معلوم کرنا۔

☆ دیے ہوئے قالبوں کا جمعی اور ضربی حاصل معلوم کرنا۔

☆ قالبوں کے درمیان ضربی خاصیت تلازم کی تصدیق کرنا۔

☆ کسی بھی دو دیے ہوئے ہم مرتبہ قالبوں کے جمعی حاصل کے دائیں یا بائیں ایک ایسے قالب سے ضربی عمل کرنا اور اس کے تقسیمی قوانین کی تصدیق کرنا۔

☆ ایک ایسی مثال لے کر یہ ثابت کرنا کہ قالبوں کے ضربی عمل کا قانون (multiplicative law) عام طور پر خاصیت مبادلہ کا حامل نہیں۔ جیسے (i) $AB \neq BA$ قالب A اور B ہم مرتبہ ہوں (ii) A اور B ہم مرتبہ نہ ہوں مگر ضربی عمل ممکن ہو۔

☆ وحدانی یا ضربی ذاتی (identity) قالب کی تعریف اور پہچان کرنا۔

☆ ضرب دیے ہوئے قالبوں A اور B سے ضربی ٹرانسپوز (transpose) کے قانون کی تصدیق کرنا۔ مثلاً

$$(AB)^t = B^t A^t$$

☆ دیے ہوئے مربعی قالبوں کے مقطع کی تعریف کرنا۔

☆ دیے ہوئے مربعی قالب کے مقطع کی قیمت معلوم کرنا۔

☆ نادر (singular) اور غیر نادر (non-singular) قالبوں کی مقطع کی مدد سے تعریف اور تصدیق کرنا۔

☆ دیے ہوئے مربعی قالب کے ایڈ جائنٹ (adjoint) کی تعریف کرنا۔

☆ دیے ہوئے مربعی غیر نادر قالب A کا معکوس قالب A^{-1} معلوم کرنا اور تصدیق کرنا کہ: $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

☆ قالب A کے ایڈ جائنٹ کی مدد سے A کا معکوس A^{-1} معلوم کرنا۔

☆ تصدیق کرنا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ جب کہ A اور B غیر نادر قالب ہوں۔

☆ دو ہم زاد مساواتوں کو کسی حقیقی عملی زندگی کے حوالہ سے دو متغیراتی مسئلہ کو باقاعدہ حل کرنا۔

- بذریعہ معکوس قالب کا قانون
- بذریعہ کریمر (cramer) کا قانون

تعارف

قالب اوراس کے مقطع جیسے تصورات کئی علوم مثلاً ریاضیات (Mathematics)، شماریات (Statistics)، فزکس (Physics) اور الیکٹرونکس (Electronics) وغیرہ کے مطالعہ میں ممدو معاون ثابت ہوتے ہیں۔ قالبوں کے استعمال نے کمپیوٹر سائنس کی اس صدی میں انقلابی کردار ادا کیا ہے اور مزید کررہا ہے۔

قالب کا تصوّر انگلستان کے انیسویں صدی کے مشہور ریاضی دان آرتھر کیلے (Arthur Cayley) نے پیش کیا۔ اس نے 58-1857 میں قالبوں کی تھیوری پیش کی۔

1.1 قالب (Matrix)

حقیقی اعداد کی مدد سے ایک مستطیلی بناوٹ مثلاً 0,1,2,3,4 اور 7 نمبروں کی مدد سے بناوٹ، $\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{matrix}$ کو بریکٹ میں بند کردینے $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ کو قالب کہا جاتا ہے۔

اسی طرح $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ایک دوسرا قالب ہے۔

ریاضیات کی اصطلاح میں اُن حقیقی اعداد کو جو قالب بنانے میں استعمال ہوئے ہوں قالب کے ارکان (elements) یا اندراج (entries) کہا جاتا ہے۔

(قالب کی جمع 'قالبوں' لکھا اور پڑھا جاتا ہے۔)

روایتی طور پر ریاضیات میں قالبوں کو انگریزی کے بڑے (capital) حروف تہجی مثلاً ,A, B, C, M, N وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ قالبوں کے ارکان کو انگریزی کے چھوٹے (small) حروف تہجی ,a,b,c,d وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

1.1.1 قالب کی قطاریں (Rows) اور کالم (Columns)

قالب کی بناوٹ یا ساخت کو مزید شناخت کرنے کی خاطر اس کے ارکان کی افقی (horizontal) اور راسی یا عمودی (vertical) ترتیب کو سمجھنا بھی ضروری ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \\ \rightarrow R_3 \end{matrix}$$

سامنے قالب A میں ارکان یا اندراج کی افقی بناوٹ یا ساخت کو قطار کہتے ہیں۔ قالب A میں تین قطاریں R_1، R_2 اور R_3 ہیں۔

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{columns: } C_1, C_2, C_3$$

سامنے قالب B میں ارکان یا اندراج کی راسی یا عمودی بناوٹ یا ساخت کو کالم کہتے ہیں۔ قالب B میں تین کالم C_1 ، C_2 اور C_3 ہیں۔

ذہن نشین رہے کہ قالب A اور قالب B کی ہر قطار میں ارکان کی تعداد برابر ہے۔ اسی طرح A اور B کے ہر کالم میں بھی ارکان کی تعداد برابر ہے۔

یاد رہے کہ ضروری نہیں کہ ہر قالب کی قطار اور کالم میں ارکان کی تعداد ہمیشہ برابر ہی ہو۔

1.1.2 قالب کا مرتبہ (Order of a Matrix)

قطاروں اور کالموں کی تعداد سے قالب کے مرتبہ کا تعین ہوتا ہے۔ اگر ایک قالب M میں قطاروں کی تعداد m ہو اور کالموں کی تعداد n ہو تو قالب M کے مرتبہ کو m-by-n سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً قالب $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 2-by-3, ہے۔ چونکہ M میں دو قطاریں اور تین کالم ہیں۔

جبکہ قالب $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 3-by-3 اور قالب $P = [\,3 \;\; 2 \;\; 5\,]$ کا مرتبہ 1-by-3 ہے۔

1.1.3 مساوی قالب (Equal Matrices)

اگر A اور B دو قالب ہوں تو قالب A کو B کے یا B کو A کے مساوی سمجھا جائے تو ان کو A = B سے ظاہر کیا جائے گا، اگر

(i) A کا مرتبہ = B کا مرتبہ

(ii) قالب A کا ہر رکن قالب B کے متناظرہ رکن کے برابر ہو۔

(i) مثلاً قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ اور قالب $B = \begin{bmatrix} 1 & 2+1 \\ -4 & 4-2 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے مساوی قالب ہیں

کیونکہ

(a) A کا مرتبہ = B کا مرتبہ

(b) قالب A کا ہر رکن قالب B کے متناظرہ رکن کے برابر ہے۔

پس $A = B$

(ii) قالب $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $L = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ آپس میں مساوی یا برابر نہیں ہیں۔

کیونکہ قالب L کا مرتبہ قالب M کے مرتبہ کے تو برابر ہے لیکن اس کے متناظرہ ارکان باہم برابر نہیں۔ مثلاً قالب L میں دوسری قطار کے دوسرے کالم کا رکن 2 اور قالب M میں 2– ہے جو یکساں یا برابر نہیں۔ اس لیے قالب L قالب M کے مساوی نہیں۔

پس $L \neq M$

(iii) اگر قالب $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ اور قالب $Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو ظاہر ہے کہ $P \neq Q$

کیونکہ قالب P کا مرتبہ، قالب Q کے مرتبہ کے برابر نہیں۔

تعارف

قالب اوراس کے مقطع جیسے تصورات کئی علوم مثلاً ریاضیات(Mathematics)، شماریات(Statistics)، فزکس(Physics) اور الیکٹرونکس (Electronics)وغیرہ کے مطالعہ میں ممد و معاون ثابت ہوتے ہیں۔ قالبوں کے استعمال نے کمپیوٹر سائنس کی اس صدی میں انقلابی کردار ادا کیا ہے اور مزید کررہا ہے۔

قالب کا تصوّر انگلستان کے انیسویں صدی کے مشہور ریاضی دان آرتھر کیلے (Arthur Cayley) نے پیش کیا۔ اس نے 58-1857 میں قالبوں کی تھیوری پیش کی۔

1.1 قالب (Matrix)

حقیقی اعداد کی مدد سے ایک مستطیلی بناوٹ مثلاً 0,1,2,3,4 اور 7 نمبروں کی مدد سے بناوٹ، $\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{matrix}$ کو بریکٹ میں بند کردینے $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ کو قالب کہا جاتا ہے۔

اسی طرح $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ایک دوسرا قالب ہے۔

ریاضیات کی اصطلاح میں اُن حقیقی اعداد کو جو قالب بنانے میں استعمال ہوئے ہوں قالب کے ارکان (elements) یا اندراج (entries) کہا جاتا ہے۔

(قالب کی جمع 'قالبوں' لکھا اور پڑھا جاتا ہے۔)

روایتی طور پر ریاضیات میں قالبوں کو انگریزی کے بڑے (capital) حروف تہجی مثلاً A, B, C, M, N, وغیرہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ قالبوں کے ارکان کو انگریزی کے چھوٹے(small) حروف تہجی a,b,c,d, وغیرہ سے ظاہر کرتے ہیں۔

1.1.1 قالب کی قطاریں (Rows) اور کالم (Columns)

قالب کی بناوٹ یا ساخت کو مزید شناخت کرنے کی خاطر اس کے ارکان کی افقی(horizontal) اور راسی یا عمودی(vertical) ترتیب کو سمجھنا بھی ضروری ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \\ \rightarrow R_3 \end{matrix}$$

سامنے قالب A میں ارکان یا اندراج کی افقی بناوٹ یا ساخت کو قطار کہتے ہیں۔ قالب A میں تین قطاریں R_1، R_2 اور R_3 ہیں۔

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\quad\ \ \downarrow \ \ \downarrow \ \ \downarrow$$
$$\quad\ \ C_1 \ \ C_2 \ \ C_3$$

سامنے قالب B میں ارکان یا اندراج کی راسی یا عمودی بناوٹ یا ساخت کو کالم کہتے ہیں۔ قالب B میں تین کالم C_1 ، C_2 اور C_3 ہیں۔

ذہن نشین رہے کہ قالب A اور قالب B کی ہر قطار میں ارکان کی تعداد برابر ہے۔ اسی طرح A اور B کے ہر کالم میں بھی ارکان کی تعداد برابر ہے۔

یاد رہے کہ ضروری نہیں کہ ہر قالب کی قطار اور کالم میں ارکان کی تعداد ہمیشہ برابر ہی ہو۔

1.1.2 قالب کا مرتبہ (Order of a Matrix)

قطاروں اور کالموں کی تعداد سے قالب کے مرتبہ کا تعین ہوتا ہے۔ اگر ایک قالب M میں قطاروں کی تعداد m ہو اور کالموں کی تعداد n ہو تو قالب M کے مرتبہ کو m-by-n سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً قالب $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 2-by-3, ہے۔ چونکہ M میں دو قطاریں اور تین کالم ہیں۔

جبکہ قالب $N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ 3-by-3 اور قالب $P = [3 \ 2 \ 5]$ کا مرتبہ 1-by-3 ہے۔

1.1.3 مساوی قالب (Equal Matrices)

اگر A اور B دو قالب ہوں تو قالب A کو B کے یا B کو A کے مساوی سمجھا جائے تو ان کو $A = B$ سے ظاہر کیا جائے گا، اگر

(i) A کا مرتبہ = B کا مرتبہ

(ii) قالب A کا ہر رکن قالب B کے متناظرہ رکن کے برابر ہو۔

(i) مثلاً قالب $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ اور قالب $B = \begin{bmatrix} 1 & 2+1 \\ -4 & 4-2 \end{bmatrix}$ ایک دوسرے کے مساوی قالب ہیں

کیونکہ

(a) A کا مرتبہ = B کا مرتبہ

(b) قالب A کا ہر رکن قالب B کے متناظرہ رکن کے برابر ہے۔

پس $A = B$

(ii) قالب $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $L = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ آپس میں مساوی یا برابر نہیں ہیں۔

کیونکہ قالب L کا مرتبہ قالب M کے مرتبہ کے تو برابر ہے لیکن اس کے متناظرہ ارکان باہم برابر نہیں۔ مثلاً قالب L میں دوسری قطار کے دوسرے کالم کا رکن 2 اور قالب M میں 2− ہے جو یکساں یا برابر نہیں۔ اس لیے قالب L قالب M کے مساوی نہیں۔

پس $L \neq M$

(iii) اگر قالب $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ اور قالب $Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو ظاہر ہے کہ $P \neq Q$

کیونکہ قالب P کا مرتبہ، قالب Q کے مرتبہ کے برابر نہیں۔

مشق 1.1

1۔ درج ذیل قالبوں کا مرتبہ بتائیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \ \ 4]$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}, \quad F = [2]$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2۔ معلوم کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون کون سے قالب آپس میں مساوی ہیں۔

$$A = [3], \quad B = [3 \ \ 5], \quad C = [5-2]$$

$$D = [5 \ \ 3], \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 3+3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad I = [3 \ \ 3+2]$$

$$J = \begin{bmatrix} 2+2 & 2-2 \\ 2+4 & 2+0 \end{bmatrix}$$

3۔ a، b، c اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے جو دی ہوئی مساوات کو درست قائم رکھتی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} a+c & a+2b \\ c-1 & 4d-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2d \end{bmatrix}$$

1.2 قالبوں کی اقسام

(i) قطاری قالب (Row Matrix)

ایسا قالب قطاری قالب کہلاتا ہے جس میں صرف ایک ہی قطار ہو۔ مثلاً $M = [2 \ \ -1 \ \ 7]$ ایک قطاری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-3 ہے۔ اور $N = [1 \ \ -1]$ ایک قطاری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-2 ہے۔

(ii) کالمی قالب (Column Matrix)

ایسا قالب کالمی قالب کہلاتا ہے جس میں صرف ایک ہی کالم ہو۔ مثلاً، $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ اور $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ دونوں کالمی قالب ہیں۔

جن میں سے M کا مرتبہ 2-by-1 اور N کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔

(iii) مستطیلی قالب **(Rectangular Matrix)**

ایسا کوئی بھی قالب مستطیلی قالب کہلاتا ہے جس میں قطاروں کی تعداد اس کے کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو۔

مثلاً $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}a & b & c\\d & e & f\end{bmatrix}$ ، $C=[1\ \ 2\ \ 3]$ اور $D=\begin{bmatrix}7\\8\\0\end{bmatrix}$ تمام مستطیلی قالب

ہیں جن میں سے A کا مرتبہ 3-by-2 ، B کا مرتبہ 2-by-3 ، C کا مرتبہ 1-by-3 اور D کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔ جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ قالب A، B، C اور D میں سے ہر ایک میں قطاروں کی تعداد ان میں کالموں کی تعداد کے برابر نہیں ہے۔

(iv) مربعی قالب **(Square Matrix)**

ایک دیا ہوا قالب مربعی قالب کہلاتا ہے اگر اس میں موجود قطاروں کی تعداد اس میں کالموں کی تعداد کے برابر ہو۔

مثلاً $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & 0 & -2\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ اور $C=[3]$ تمام مربعی قالب ہیں۔

جن میں سے A کا مرتبہ 2-by-2 ، B کا مرتبہ 3-by-3 اور C کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

(v) صفری قالب **(Null or Zero Matrix)**

ایک دیا ہوا قالب صفری قالب کہلاتا ہے اگر اس میں ہر رکن صفر ہو۔

مثلاً $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ ، $B=[0\ \ 0]$ ، $C=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ اور $E=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

تمام صفری قالب ہیں۔ ان میں سے A کا مرتبہ 2-by-2 ، B کا مرتبہ 1-by-2 ، C کا مرتبہ 2-by-1 ، D کا مرتبہ 2-by-3 اور قالب E کا مرتبہ 3-by-3 ہے۔

نوٹ: کسی بھی مرتبہ کے صفری قالب کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(vi) ٹرانسپوز قالب **(Transpose Matrix)**

دیے ہوئے قالب M کی قطاروں کو کالموں میں بدل دینے سے نئے قالب $(M)^t$ کو قالب M کا ٹرانسپوز قالب کہا جاتا ہے۔ یاد رہے R_1 کو C_1 ، R_2 کو C_2 اور R_3 کو C_3 وغیرہ میں بدلا جائے۔ اسی طرح کالموں کو قطاروں میں بدل دینے سے نیا قالب $(M)^t$ ہی ٹرانسپوز قالب ہوگا۔ مثلاً

(i) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 4\\3 & 0 & -2\end{bmatrix}$ ہو تو $A^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 0\\-1 & 4 & -2\end{bmatrix}$

مشق 1.1

1۔ درج ذیل قالبوں کا مرتبہ بتائیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 4]$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}, \quad F = [2]$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2۔ معلوم کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون کون سے قالب آپس میں مساوی ہیں۔

$$A = [3], \quad B = [3 \quad 5], \quad C = [5-2]$$

$$D = [5 \quad 3], \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 3+3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad I = [3 \quad 3+2]$$

$$J = \begin{bmatrix} 2+2 & 2-2 \\ 2+4 & 2+0 \end{bmatrix}$$

3۔ c، b، a اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے جو دی ہوئی مساوات کو درست قائم رکھتی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} a+c & a+2b \\ c-1 & 4d-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 3 & 2d \end{bmatrix}$$

1.2 قالبوں کی اقسام

(i) قطاری قالب (Row Matrix)

ایسا قالب قطاری قالب کہلاتا ہے جس میں صرف ایک ہی قطار ہو۔ مثلاً $M = [2 \quad -1 \quad 7]$ ایک قطاری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-3 ہے۔ اور $N = [1 \quad -1]$ ایک قطاری قالب ہے جس کا مرتبہ 1-by-2 ہے۔

(ii) کالمی قالب (Column Matrix)

ایسا قالب کالمی قالب کہلاتا ہے جس میں صرف ایک ہی کالم ہو۔ مثلاً، $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ اور $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ دونوں کالمی قالب ہیں۔

جن میں سے M کا مرتبہ 2-by-1 اور N کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔

(iii) مستطیلی قالب (Rectangular Matrix)

ایسا کوئی بھی قالب مستطیلی قالب کہلاتا ہے جس میں قطاروں کی تعداد اس کے کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو۔

مثلاً $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ ، $C=[1\ \ 2\ \ 3]$ اور $D=\begin{bmatrix}7\\ 8\\ 0\end{bmatrix}$ تمام مستطیلی قالب

ہیں جن میں سے A کا مرتبہ 3-by-2 ، B کا مرتبہ 2-by-3 ، C کا مرتبہ 1-by-3 اور D کا مرتبہ 3-by-1 ہے۔ جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ قالب A، B، C اور D میں سے ہر ایک میں قطاروں کی تعداد ان میں کالموں کی تعداد کے برابر نہیں ہے۔

(iv) مربعی قالب (Square Matrix)

ایک دیا ہوا قالب مربعی قالب کہلاتا ہے اگر اس میں موجود قطاروں کی تعداد اس میں کالموں کی تعداد کے برابر ہو۔

مثلاً $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ اور $C=[3]$ تمام مربعی قالب ہیں۔

جن میں سے A کا مرتبہ 2-by-2 ، B کا مرتبہ 3-by-3 اور C کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

(v) صفری قالب (Null or Zero Matrix)

ایک دیا ہوا قالب صفری قالب کہلاتا ہے اگر اس میں ہر رکن صفر ہو۔

مثلاً $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ، $B=[0\ \ 0]$ ، $C=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ اور $E=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

تمام صفری قالب ہیں۔ ان میں سے A کا مرتبہ 2-by-2 ، B کا مرتبہ 1-by-2 ، C کا مرتبہ 2-by-1 ، D کا مرتبہ 2-by-3 اور قالب E کا مرتبہ 3-by-3 ہے۔

نوٹ: کسی بھی مرتبہ کے صفری قالب کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(vi) ٹرانسپوز قالب (Transpose Matrix)

دیے ہوئے قالب M کی قطاروں کو کالموں میں بدل دینے سے نئے قالب $(M)^t$ کو قالب M کا ٹرانسپوز قالب کہا جاتا ہے۔ یاد رہے R_1 کو C_1 ، R_2 کو C_2 اور R_3 کو C_3 وغیرہ میں بدلا جائے۔ اسی طرح کالموں کو قطاروں میں بدل دینے سے نیا قالب $(M)^t$ ہی ٹرانسپوز قالب ہوگا۔ مثلاً

(i) اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}$ ہو تو $A^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 4 & -2\end{bmatrix}$

(ii) اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) اگر $C = [0 \quad 1]$ ہو تو $C^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

غور کیجیے اوپر درج مثالوں (ii) اور (iii) میں مستطیلی قالبوں B اور C کا مرتبہ بالترتیب 2-by-3 اور 1-by-2 ہے تو ان کے ٹرانسپوز قالبوں کا درجہ بدل کر بالترتیب 3-by-2 اور 2-by-1 ہو گیا ہے۔ مثال (i) میں مربعی قالب A اور اس کے ٹرانسپوز کا درجہ 3-by-3 ہی رہا۔

(vii) **منفی قالب (Negative Matrix)**

دیے ہوئے قالب A کا منفی قالب A– ہوگا جس میں دیے ہوئے قالب A کا ہر رکن اس کے منفی اندراج میں بدل دیا جائے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تو $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ، A کا منفی قالب ہوگا۔

(viii) **سیمٹرک قالب (Symmetric Matrix)**

ایک ایسا مربعی قالب A سیمٹرک قالب کہلاتا ہے جس کا ٹرانسپوز قالب $(A)^t$ قالب A کے مساوی قالب ہو۔

یعنی قالب A سیمٹرک قالب ہوگا اگر $(A)^t = A$

مثلاً

(i) اگر $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو $(M)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = M$

پس قالب M ایک سیمٹرک قالب ہے۔

(ii) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو $(A)^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq A$

پس قالب A ایک سیمٹرک قالب نہیں ہے۔

(ix) **سکیوسیمٹرک قالب (Skew Symmetric Matrix)**

ایک مربعی قالب A کو سکیوسیمٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر $(A)^t = -A$

مثلاً

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$(A)^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -(-2) & 0 & -1 \\ -(-3) & -(-1) & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

پس A ایک سکیو سیمٹرک قالب ہے۔

(x) وتری قالب (Diagonal Matrix)

ایسا مربعی قالب جس میں وتر کے ارکان میں سے کم از کم ایک رکن غیر صفر ہو اور باقی تمام ارکان صفر ہوں وتری قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ تینوں قالب وتری قالب ہیں جن کا مرتبہ 3-by-3 ہے۔

قالب $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ وتری قالب ہیں جن کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

(xi) سکیلر قالب (Scalar Matrix)

ایسا وتری قالب جس میں وتر کے تمام ارکان یا اندراج یکساں ہوں سکیلر قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر قالب $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ ایک سکیلر قالب ہے۔ اگر $k \neq 0$

قالب $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $C = [5]$ تمام سکیلر قالب ہیں۔

جن میں A کا مرتبہ 3-by-3 ، B کا مرتبہ 2-by-2 اور C کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

(xii) وحدانی یا ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity Matrix)

ایک وتری قالب جو سکیلر قالب بھی ہو اور ہر وتری رکن 1 ہو وحدانی یا ضربی ذاتی قالب کہلاتا ہے جس کو 'I' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وحدانی یا ضربی ذاتی قالب ہے جس کا مرتبہ 3-by-3 ہے۔

(ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وحدانی یا ضربی ذاتی قالب کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

(ii) اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) اگر $C = [0 \quad 1]$ ہو تو $C^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

غور کیجیے اوپر درج مثالوں (ii) اور (iii) میں مستطیلی قالبوں B اور C کا مرتبہ بالترتیب 2-by-3 اور 1-by-2 ہے تو ان کے ٹرانسپوز قالبوں کا درجہ بدل کر بالترتیب 3-by-2 اور 2-by-1 ہو گیا ہے۔ مثال (i) میں مربعی قالب A اور اس کے ٹرانسپوز کا درجہ 3-by-3 ہی رہا۔

(vii) منفی قالب (Negative Matrix)

دیے ہوئے قالب A کا منفی قالب A– ہوگا جس میں دیے ہوئے قالب A کا ہر رکن اس کے منفی اندراج میں بدل دیا جائے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ تو $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ ، A کا منفی قالب ہوگا۔

(viii) سیمٹرک قالب (Symmetric Matrix)

ایک ایسا مربعی قالب A سیمٹرک قالب کہلاتا ہے جس کا ٹرانسپوز قالب $(A)^t$ قالب A کے مساوی قالب ہو۔

یعنی قالب A سیمٹرک قالب ہوگا اگر $(A)^t = A$

مثلاً

(i) اگر $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو $(M)^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = M$

پس قالب M ایک سیمٹرک قالب ہے۔

(ii) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو $(A)^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq A$

پس قالب A ایک سیمٹرک قالب نہیں ہے۔

(ix) سکیو سیمٹرک قالب (Skew Symmetric Matrix)

ایک مربعی قالب A کو سکیو سیمٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر $-A = (A)^t$

مثلاً

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$(A)^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -(-2) & 0 & -1 \\ -(-3) & -(-1) & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

پس A ایک سکیو سیمٹرک قالب ہے۔

(x) وتری قالب (Diagonal Matrix)

ایسا مربعی قالب جس میں وتر کے ارکان میں سے کم از کم ایک رکن غیر صفر ہو اور باقی تمام ارکان صفر ہوں وتری قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ تینوں قالب وتری قالب ہیں جن کا مرتبہ 3-by-3 ہے۔

قالب $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ وتری قالب ہیں جن کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

(xi) سکیلر قالب (Scalar Matrix)

ایسا وتری قالب جس میں وتر کے تمام ارکان یا اندراج یکساں ہوں سکیلر قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر قالب $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ ایک سکیلر قالب ہے۔ اگر $k \neq 0$

قالب $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ اور $C = [5]$ تمام سکیلر قالب ہیں۔

جن میں A کا مرتبہ 3-by-3 ، B کا مرتبہ 2-by-2 اور C کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

(xii) وحدانی یا ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity Matrix)

ایک وتری قالب جو سکیلر قالب بھی ہو اور ہر وتری رکن 1 ہو وحدانی یا ضربی ذاتی قالب کہلاتا ہے جس کو 'I' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ وحدانی یا ضربی ذاتی قالب ہے جس کا مرتبہ 3-by-3 ہے۔

(ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ وحدانی یا ضربی ذاتی قالب کا مرتبہ 2-by-2 ہے۔

(iii) $C = [1]$ وحدانی یا ضربی ذاتی قالب کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

> **نوٹ:** (i) سکیلر اور وحدانی قالب تمام وتری قالب ہیں۔
> (ii) ہر وتری قالب ایک سکیلر یا وحدانی قالب نہیں۔

مشق 1.2

1۔ دیے ہوئے مندرجہ ذیل قالبوں میں سے (i) وحدانی قالبوں (ii) قطاری قالبوں (iii) کالمی قالبوں اور (iv) صفری قالبوں کی شناخت اور تصدیق بھی کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad B = [2 \quad 3 \quad 4] , \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad E = [\,0\,] , \quad F = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے (a) مربعی قالبوں (b) مستطیلی قالبوں (c) قطاری قالبوں (d) کالمی قالبوں (e) وحدانی قالبوں اور (f) صفری قالبوں کی شناخت کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, (iii) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, (vi) $[3 \quad 10 \quad -1]$

(vii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (viii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (ix) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے وتری، سکیلر اور وحدانی قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ اور } E = \begin{bmatrix} 5-3 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{bmatrix}$$

4۔ نیچے دیے ہوئے A، B، C، D اور E قالبوں کے بالترتیب منفی قالب معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں کے ٹرانسپوز قالب معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B = [5 \quad 1 \quad -6], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $(A^t)^t = A$ (ii) $(B^t)^t = B$

1.3 قالبوں کی جمع اور تفریق (Addition and Subtraction of Matrices)

1.3.1 قالبوں کی جمع (Addition of Matrices)

اگر A اور B دو قالب ہوں جن کے ارکان یا اندراج حقیقی اعداد ہوں تو A اور B جمعی خاصیت کے حامل ہوں گے اگر وہ ہم مرتبہ قالب ہوں۔ جیسا کہ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہم مرتبہ ہیں۔ اس لیے ان میں جمعی خاصیت ہے اور حاصل جمع A + B میں ہر رکن قالب A کے ہر رکن میں قالب B کا متناظرہ رکن جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ جیسا کہ

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-2) & 3+3 & 0+4 \\ 1+1 & 0+2 & 6+3 \end{bmatrix}$$

پس

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

(iii) $C = [1]$ وحدانی یا ضربی ذاتی قالب کا مرتبہ 1-by-1 ہے۔

> **نوٹ:** (i) سکیلر اور وحدانی قالب تمام وتری قالب ہیں۔
> (ii) ہر وتری قالب ایک سکیلر یا وحدانی قالب نہیں۔

مشق 1.2

1۔ دیے ہوئے مندرجہ ذیل قالبوں میں سے (i) وحدانی قالبوں (ii) قطاری قالبوں (iii) کالمی قالبوں اور (iv) صفری قالبوں کی شناخت اور تصدیق بھی کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = [2 \quad 3 \quad 4], \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = [0], \quad F = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے (a) مربعی قالبوں (b) مستطیلی قالبوں (c) قطاری قالبوں (d) کالمی قالبوں (e) وحدانی قالبوں اور (f) صفری قالبوں کی شناخت کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} -8 & 2 & 7 \\ 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, (iii) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, (vi) $[3 \quad 10 \quad -1]$

(vii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (viii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (ix) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے وتری، سکیلر اور وحدانی قالبوں کی شناخت کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad E = \begin{bmatrix} 5-3 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{bmatrix}$$

4۔ نیچے دیے ہوئے A، B، C، D اور E قالبوں کے بالترتیب منفی قالب معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں کے ٹرانسپوز قالب معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = [5 \quad 1 \quad -6] \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $(A^t)^t = A$ (ii) $(B^t)^t = B$

1.3 قالبوں کی جمع اور تفریق (Addition and Subtraction of Matrices)

1.3.1 قالبوں کی جمع (Addition of Matrices)

اگر A اور B دو قالب ہوں جن کے ارکان یا اندراج حقیقی اعداد ہوں تو A اور B جمعی خاصیت کے حامل ہوں گے اگر وہ ہم مرتبہ قالب ہوں۔ جیسا کہ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہم مرتبہ ہیں۔ اس لیے ان میں جمعی خاصیت ہے اور حاصل جمع A + B میں ہر رکن قالب A کے ہر رکن میں قالب B کا متناظرہ رکن جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ جیسا کہ

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-2) & 3+3 & 0+4 \\ 1+1 & 0+2 & 6+3 \end{bmatrix}$$

پس

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

1.3.2 قالبوں کی تفریق (Subtraction of Matrices)

کوئی سے بھی دو ہم مرتبہ قالبوں A اور B میں سے قالب B کا تفریقی قالب A سے ایک ایسے قالب کا حصول ہوگا جس کے ارکان قالب B کے ارکان کو قالب A کے متناظرہ ارکان میں سے تفریق کر کے حاصل کیے گئے ہوں۔ جس کو A – B سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ جو ہم مرتبہ قالب ہیں۔

پس

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-0 & 3-2 & 4-2 \\ 1-(-1) & 5-4 & 0-3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

مثالیں: کچھ مثالوں کو حل کر کے طلبا کی راہنمائی کی گئی ہے تا کہ ان کو قالبوں کو جمع اور تفریق کرنا مکمل سمجھ میں آجائے۔

(a) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ تو

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 & 7+4 \\ 0+1 & -1+(-1) & 3+2 \\ 2+5 & 5-2 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 1 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

اور $A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2-3 & 7-4 \\ 0-1 & -1+1 & 3-2 \\ 2-5 & 5+2 & 1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

(b) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 \\ -1+1 & 3-2 \\ 0+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

اور

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 \\ -1-1 & 3+2 \\ 0-3 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

نوٹ:۔ جمع یا تفریق کے عمل سے نئے قالب کا درجہ تبدیل نہیں ہوتا۔

1.3.3 دیے ہوئے قالب پر ایک حقیقی عدد کا ضربی عمل

اگر قالب A کو حقیقی عدد k سے ضرب دینا ہو تو قالب A کے ہر رکن کو k سے ضرب دینے سے نیا قالب kA حاصل ہوتا ہے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ایک قالب کو $-2 = k$ ایک حقیقی عدد سے ضرب دینے سے حاصل قالب

1.3.2 قالبوں کی تفریق (Subtraction of Matrices)

کوئی سے بھی دو ہم مرتبہ قالبوں A اور B میں سے قالب B کا تفریقی قالب A سے ایک ایسے قالب کا حصول ہوگا جس کے ارکان قالب B کے ارکان کو قالب A کے متناظرہ ارکان میں سے تفریق کر کے حاصل کیے گئے ہوں۔ جس کو A – B سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ جو ہم مرتبہ قالب ہیں۔

پس
$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-0 & 3-2 & 4-2 \\ 1-(-1) & 5-4 & 0-3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

مثالیں: کچھ مثالوں کو حل کر کے طلبا کی راہنمائی کی گئی ہے تاکہ ان کو قالبوں کو جمع اور تفریق کرنا مکمل سمجھ میں آجائے۔

(a) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ تو

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 & 7+4 \\ 0+1 & -1+(-1) & 3+2 \\ 2+5 & 5-2 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 1 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{اور } A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2-3 & 7-4 \\ 0-1 & -1+1 & 3-2 \\ 2-5 & 5+2 & 1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

(b) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 \\ -1+1 & 3-2 \\ 0+3 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

اور

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 \\ -1-1 & 3+2 \\ 0-3 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

نوٹ:۔ جمع یا تفریق کے عمل سے نئے قالب کا درجہ تبدیل نہیں ہوتا۔

1.3.3 دیے ہوئے قالب پر ایک حقیقی عدد کا ضربی عمل

اگر قالب A کو حقیقی عدد k سے ضرب دینا ہو تو قالب A کے ہر رکن کو k سے ضرب دینے سے نیا قالب kA حاصل ہوتا ہے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ایک قالب کو $k = -2$ ایک حقیقی عدد سے ضرب دینے سے حاصل قالب

$kA = (-2)A$

$$= (-2)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(1) & (-2)(-1) & (-2)(4) \\ (-2)(2) & (-2)(-1) & (-2)(0) \\ (-2)(-1) & (-2)(3) & (-2)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

چونکہ قالب A کا مرتبہ 3-by-3 ہے اور قالب kA کا مرتبہ بھی 3-by-3 ہی ہے۔

پس قالب A کو رکن k سے ضرب دینے سے kA کے مرتبہ میں تبدیلی نہیں ہوتی۔

1.3.4 قالبوں کی جمعی خاصیتوں کے قوانین مبادلہ اور تلازم

(a) قانون مبادلہ بلحاظ جمع (Additive Commutative Law)

اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں تو اُن کی جمعی خاصیت $A + B = B + A$ کو قانون مبادلہ کہتے ہیں۔

مثلاً اگر
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

تو
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3-2 & 0+5 \\ 5-1 & 6+4 & 1+1 \\ 2+4 & 1+2 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

اسی طرح

$$B + A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

لہذا $A + B = B + A$

پس مبادلہ خاصیت بلحاظ جمع کے قانون کی تصدیق ہو جاتی ہے۔

(b) قانون تلازم بلحاظ جمع (Associative Law under Addition)

اگر A، B اور C تینوں قالب ہم مرتبہ ہوں اور جمعی خاصیت $(A + B) + C = A + (B + C)$ رکھتے ہوں تو اس خاصیت کو جمعی قانون تلازم یا قانون تلازم بلحاظ جمع کہتے ہیں۔

اگر
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ اور } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
ہوں تو

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3-2 & 0+5 \\ 5-1 & 6+4 & 1+1 \\ 2+4 & 1+2 & 3-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+1 & -2+2 & 5+3 \\ -1-2 & 4+0 & 1+4 \\ 4+1 & 2+2 & -4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

لہذا

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

پس قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق ہو جاتی ہے۔

1.3.5 قالب کا جمعی ذاتی قالب (Additive Identity of a Matrix)

اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں اور بلحاظ جمع خاصیت $A+B = A = B + A$ ہو تو قالب B قالب A کا جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے۔

کسی بھی قالب A کے ہم مرتبہ صفری قالب O قالب A کا جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے

جبکہ

$$A + O = A = O + A$$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$A+O = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = A$$

اور

$$O+A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = A$$

پس ثابت ہوا کہ

$$A+O = A=O+A$$

$kA = (-2)A$

$$= (-2)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(1) & (-2)(-1) & (-2)(4) \\ (-2)(2) & (-2)(-1) & (-2)(0) \\ (-2)(-1) & (-2)(3) & (-2)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

چونکہ قالب A کا مرتبہ 3-by-3 ہے اور قالب kA کا مرتبہ بھی 3-by-3 ہی ہے۔
پس قالب A کو رکن k سے ضرب دینے سے kA کے مرتبہ میں تبدیلی نہیں ہوتی۔

1.3.4 قالبوں کی جمعی خاصیتوں کے قوانین مبادلہ اور تلازم

(a) قانون مبادلہ بلحاظ جمع (Additive Commutative Law)

اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں تو اُن کی جمعی خاصیت $A + B = B + A$ کو قانون مبادلہ کہتے ہیں۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

تو

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3-2 & 0+5 \\ 5-1 & 6+4 & 1+1 \\ 2+4 & 1+2 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

اسی طرح

$$B + A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

لہذا $A + B = B + A$

پس مبادلہ خاصیت بلحاظ جمع کے قانون کی تصدیق ہو جاتی ہے۔

(b) قانون تلازم بلحاظ جمع (Associative Law under Addition)

اگر A، B اور C تینوں قالب ہم مرتبہ ہوں اور جمعی خاصیت $(A + B) + C = A + (B + C)$ رکھتے ہوں تو اس خاصیت کو جمعی قانون تلازم یا قانون تلازم بلحاظ جمع کہتے ہیں۔

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 3-2 & 0+5 \\ 5-1 & 6+4 & 1+1 \\ 2+4 & 1+2 & 3-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3+1 & -2+2 & 5+3 \\ -1-2 & 4+0 & 1+4 \\ 4+1 & 2+2 & -4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 2 & 10 & 6 \\ 7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

لہذا $(A+B)+C = A+(B+C)$

پس قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق ہوجاتی ہے۔

1.3.5 قالب کا جمعی ذاتی قالب (Additive Identity of a Matrix)

اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں اور بلحاظ جمعی خاصیت $A+B = A = B + A$ ہو تو قالب B قالب A کا جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے۔

کسی بھی قالب A کے ہم مرتبہ صفری قالب O قالب A کا جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے

جبکہ $A + O = A = O + A$

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ اور $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$A + O = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = A$$

اور

$$O + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = A$$

پس ثابت ہوا کہ $A+O = A=O+A$

1.3.6 قالب کا جمعی معکوس (Additive Inverse of a Matrix)

اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں جو مندرجہ ذیل جمعی خاصیت کے حامل ہوں

$$A + B = O = B + A$$

تو قالب A اور B دونوں ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔ پس قالب A کا جمعی معکوس وہ قالب ہوگا جو قالب A کے تمام غیر صفری ارکان کو ان کے جمعی معکوس یعنی منفی ارکان میں بدل دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$B = (-A) = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

جو قالب A کا جمعی معکوس قالب ہے۔ اس کی تصدیق یوں کی جاسکتی ہے۔

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)+(-1) & (2)+(-2) & (1)+(-1) \\ 0+0 & (-1)+(1) & (-2)+(2) \\ (3)+(-3) & (1)+(-1) & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

اور

$$B + A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)+(1) & (-2)+(2) & (-1)+(1) \\ 0+0 & (1)+(-1) & (2)+(-2) \\ (-3)+(3) & (-1)+(1) & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

چونکہ $A + B = O = B + A$

پس A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

مشق 1.3

1۔ درج ذیل قالبوں میں سے کون کون سے قالب ایک دوسرے سے جمعی خاصیت رکھتے ہیں نشاندہی کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1+1 & -4 \\ 3+2 & 2+1 \end{bmatrix}$$

2۔ مندرجہ ذیل قالبوں کے جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ اور $$F = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3۔ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو ان کی مدد سے مندرجہ ذیل قالب معلوم کیجیے۔

(i) $A + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $B + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (iii) $C + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(iv) $D + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (v) $2A$ (vi) $(-1)B$

(vii) $(-2)C$ (viii) $3D$ (ix) $3C$

4۔ قالبوں کے جمعی اور تفریقی عمل کی مدد سے حاصل قالب معلوم کیجیے۔

(i) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $[2 \ \ 3 \ \ 1] + ([1 \ \ 0 \ \ 2] - [2 \ \ 2 \ \ 2])$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

5۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ قالب ہوں تو

درج ذیل قوانین کی تصدیق کیجیے۔

(i) $A + C = C + A$ (ii) $A + B = B + A$
(iii) $B + C = C + B$ (iv) $A + (B + A) = 2A + B$
(v) $(C - B) + A = C + (A - B)$ (vi) $2A + B = A + (A + B)$
(vii) $(C-B) - A = (C - A) - B$ (viii) $(A + B) + C = A + (B + C)$
(ix) $A + (B - C) = (A - C) + B$ (x) $2A + 2B = 2(A + B)$

6۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ ہو تو معلوم کیجیے:

(i) $3A - 2B$ (ii) $2A^t - 3B^t$

7۔ اگر $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 18 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & a \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & b \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ تو ارکان a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

8۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو درج ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) $(A + B)^t = A^t + B^t$ (ii) $(A - B)^t = A^t - B^t$

(iii) $A + A^t$ ایک سیمٹرک قالب ہے (iv) $A - A^t$ ایک سکیو سیمٹرک قالب ہے۔

(v) $B + B^t$ ایک سیمٹرک قالب ہے۔ (vi) $B - B^t$ ایک سکیو سیمٹرک قالب ہے۔

1.4 قالبوں کی ضرب (Multiplication of Matrices)

دیے ہوئے دو قالبوں A اور B کو باہمی ضرب دینے کے عمل سے ایک تیسرا قالب AB یا BA حاصل ہوتا ہے۔ قالب A کو B سے ضرب دینے کے لیے AB اس وقت حاصل ہوتا ہے جب قالب A میں کالموں کی تعداد قالب B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

جیسا کہ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ میں دو کالم ہیں اور $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ میں قطاروں کی تعداد دو ہے

اس لیے قالب A کو قالب B سے ضرب دے کر قالب AB حاصل ہوتا ہے۔

ضرب کے عمل کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے دی جاتی ہے۔

(i) اگر $A = [1\ \ 2]$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو A میں دو کالم اور B میں دو قطاریں ہیں

اس لیے
$$AB = [1\ \ 2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [1\times2+2\times3\quad 1\times0+2\times1]$$
$$= [2+6\quad 0+2]$$
$$= [8\quad 2]$$

جو ایک 1-by-2 قالب ہے۔

(ii) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ہو تو چونکہ A میں کالموں کی تعداد دو اور قالب B میں قطاروں کی تعداد بھی دو ہے۔ اس لیے

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times(-1)+3\times3 & 1\times0+3\times2 \\ 2(-1)+(-3)(3) & 2\times0+(-3)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+9 & 0+6 \\ -2-9 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

پس AB ایک 2-by-2 قالب ہے

یاد رکھیے کہ BA بھی حاصل قالب 2-by-2 ہوگا لیکن ضروری نہیں کہ $AB = BA$ ہو۔

1.4.1 قالبوں کی خاصیت تلازم بلحاظ ضرب (Associative Law under Multiplication)

اگر A ، B اور C تین قالب ہوں جن پر باہمی ضرب کا عمل ممکن ہو تو درج ذیل قانون ضربی قانون تلازم کہلاتا ہے، اگر $(AB)C = A(BC)$ ہو۔

مثال کے طور پر اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

بائیں طرف $= (AB)C$

$$= \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times0+3\times3 & 2\times1+3\times1 \\ -1\times0+0\times3 & -1\times1+0\times1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+9 & 2+3 \\ 0+0 & -1+0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9\times2+5\times(-1) & 9\times2+5\times0 \\ 0\times2+(-1)\times(-1) & 0\times2+(-1)\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18-5 & 18+0 \\ 0+1 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

دائیں طرف $= A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\times2+1\times(-1) & 0\times2+1\times0 \\ 3\times2+1\times(-1) & 3\times2+1\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2(-1)+3\times5 & 2\times0+3\times6 \\ (-1)(-1)+0\times5 & -1\times0+0\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+15 & 0+18 \\ 1+0 & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (AB)C$$

پس قالبوں کے قانون تلازم بلحاظ ضرب کی تصدیق ہوتی ہے۔

1.4.2 قالبوں کی جمع اور تفریق پر ضرب کے تقسیمی قوانین
(Distributive Laws of Multiplication over Addition and Subtraction)

(a) اگر تین قالب A، B اور C ہوں تو ان کے ضرب کے جمع پر تقسیمی قوانین درج ذیل ہیں:

(i) $A(B + C) = AB + AC$ (بایاں تقسیمی قانون)

(ii) $(A + B)C = AC + BC$ (دایاں تقسیمی قانون)

(i) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو

بائیں طرف $= A(B+C)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0+2 & 1+2 \\ 3-1 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times2+3\times2 & 2\times3+3\times1 \\ -1\times2+0\times2 & -1\times3+0\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+6 & 6+3 \\ -2+0 & -3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

دائیں طرف $= AB + AC$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times0+3\times3 & 2\times1+3\times1 \\ -1\times0+0\times3 & -1\times1+0\times1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\times2+3\times(-1) & 2\times2+3\times0 \\ -1\times2+0\times(-1) & -1\times2+0\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+1 & 5+4 \\ 0-2 & -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$$ بائیں طرف

پس ظاہر ہوا کہ $A(B + C) = AB + AC$

(ii) اوپر دی ہوئی وضاحت کے مطابق قانون (ii) کی بھی تصدیق ہو جاتی ہے کہ

$$(A + B)C = AC + BC$$

(b) قالبوں کی تفریق پر ضرب کے تقسیمی قوانین

(i) $A(B-C) = AB - AC$ (بایاں تقسیمی قانون)

(ii) $(A-B)C = AC - BC$ (دایاں تقسیمی قانون)

(i) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ہوں تو

بائیں طرف $= A(B-C)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -1-2 & 1-1 \\ 1-1 & 0-2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2)(-3)+(3)(0) & 2(0)+3(-2) \\ (0)(-3)+1\times 0 & 0\times 0+(1)(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+0 & 0-6 \\ 0+0 & 0-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

دائیں طرف $= AB - AC$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(-1)+3(1) & 2(1)+3(0) \\ 0(-1)+1(1) & 0(1)+1(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\times 2+3\times 1 & 2\times 1+3\times 2 \\ 0\times 2+1\times 1 & 0\times 1+1\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-7 & 2-8 \\ 1-1 & 0-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} =$$ بائیں طرف

پس ظاہر ہوا کہ $A(B-C) = AB - AC$

(ii) اوپر دی ہوئی وضاحت کے مطابق قانون (ii) کی بھی تصدیق ہو جاتی ہے کہ

$$(A-B)C = AC - BC$$

1.4.3 قالبوں کا ضربی قانون مبادلہ (Commutative Law of Multiplication of Matrices)

اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ دو قالب ہوں تو

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\times1+1\times0 & 0\times0+1(-2) \\ 2\times1+3\times0 & 2\times0+3(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

اور

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times0+0\times2 & 1\times1+0\times3 \\ 0\times0+(-2)\times2 & 0\times1+3(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

پس $AB \neq BA$ جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ قالبوں کا ضربی قانون مبادلہ عام طور پر لاگو نہیں ہوتا۔

اگر قالب A اور B دونوں وتری قالب ہوں تو خاص طور پر ضربی قانون مبادلہ لاگو رہتا ہے۔ مثلاً

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ دونوں وتری قالب ہوں تو

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times(-3)+0\times0 & 2\times0+0\times4 \\ 0\times(-3)+1\times0 & 0\times0+1\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

اور

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3\times2+0\times0 & -3\times0+0\times1 \\ 0\times2+4\times0 & 0\times0+4\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = AB$$

پس $AB = BA$ اگر قالب A اور B خاص طور پر وتری قالب ہوں۔

1.4.4 ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity of a Matrix)

دو قالب A اور B ہوں تو قالب B قالب A کا ضربی ذاتی قالب کہلائے گا۔ اگر

$$AB = A = BA$$

مثال کے طور پر اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times1 \\ 0\times1+(-3)\times0 & 0\times0+(-3)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

اور
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0 & 1\times2+0\times(-3) \\ 0\times1+1\times0 & 0\times2+1\times(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = A$$

پس $AB = A = BA$ اور قالب B قالب A کا ضربی ذاتی قالب ہے۔

1.4.5 ٹرانسپوز قانون $(AB)^t = B^t A^t$ کی تصدیق

اگر A اور B دو قالب ہوں جن کے ٹرانسپوز بالترتیب A^t اور B^t ہوں تو $(AB)^t = B^tA^t$

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ہوں تو

بائیں طرف $= (AB)^t$

$$= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix} 2\times1+1\times(-2) & 2\times3+1\times0 \\ 0\times1+(-1)\times(-2) & 0\times3+(-1)\times0 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 6+0 \\ 0+2 & 0+0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

دائیں طرف $= B^t A^t$

$$(A)^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (B)^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^tA^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times2+(-2)\times1 & 1\times0+(-2)(-1) \\ 3\times2+0\times1 & 3\times0+0\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 0+2 \\ 6+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \text{بائیں طرف}$$

پس
$$(AB)^t = B^tA^t$$

مشق 1.4

1۔ کیا درجِ ذیل ضربی حاصل قالب ممکن ہے یا نہیں؟

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ ہوتو (i) AB اور (ii) BA معلوم کیجیے۔

3۔ مندرجہ ذیل ضربی حاصل معلوم کیجیے۔

(i) $[1 \quad 2] \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (ii) $[1 \quad 2] \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ (iii) $[-3 \quad 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

(iv) $[6 \quad -0] \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

4۔ مندرجہ ذیل کا ضربی حاصل معلوم کیجیے۔

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5۔ اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ہوتو درج ذیل کی تصدیق کیجیے (اگر ممکن ہو)۔

(i) $AB = BA$ (ii) $A(BC) = (AB)C$

(iii) $A(B + C) = AB + AC$ (iv) $A(B - C) = AB - AC$

6۔ قالبوں $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ کی مدد سے درج ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) $(AB)^t = B^t A^t$ (ii) $(BC)^t = C^t B^t$

1.5 قالب کا ضربی معکوس (Multiplicative Inverse of a Matrix)

1.5.1 ایک 2-by-2 قالب کا مقطع (Determinant of a 2-by-2 Matrix)

ایک مربعی 2-by-2 قالب $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کے مقطع کو |A| یا det A سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$|A| = \det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \lambda \in R$$

مثلاً اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ تو

$$|B| = \det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times 3 - (-2)(1)$$
$$= 3 + 2 = 5$$

اسی طرح اگر $M = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو اس کا مقطع ہوگا:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 6 = 6 - 6 = 0$$

1.5.2 نادر اور غیر نادر قالب (Singular and Non-Singular Matrix)

ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر اس کا مقطع |A| صفر کے مساوی ہو یا $|A| = 0$

مثال کے طور پر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ایک نادر قالب ہے۔ کیونکہ

$$|A| = 1 \times 0 - 0 \times 2 = 0$$

ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر A کا مقطع |A| صفر کے مساوی نہ ہو یا $|A| \neq 0$

مثلاً $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ایک غیر نادر قالب ہے کیونکہ

$$|A| = 1 \times 2 - 0 \times 1 = 2 \neq 0$$

نوٹ: ہر مربعی قالب جس کے ارکان حقیقی عدد ہوں نادر قالب یا غیر نادر قالب ہوتا ہے

1.5.3 قالب کا ایڈ جائنٹ (Adjoint of a Matrix)

اگر قالب $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہو تو اس کا ایڈ جائنٹ قالب ایک ایسا قالب ہے جو A کے وتری ارکان کو باہمی تبدیل کرنے کے ساتھ غیر وتری ارکان کو منفی ارکان میں بدل دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

جیسا کہ

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثلاً (i) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ہو تو $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ ہو تو $\text{Adj } B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

1.5.4 غیر نادر قالب کا ضربی معکوس (Multiplicative Inverse of a Non-Singular Matrix)

اگر دو غیر نادر قالب A اور B ہم مرتبہ مربعی قالب ہوں تو A اور B دونوں ایک دوسرے کا ضربی معکوس کہلاتے ہیں۔ یعنی

$$AB = BA = I$$

اگر قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} سے ظاہر کیا جائے تو $B = A^{-1}$ ہے۔

پس

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} معلوم کرنا ممکن ہوگا اگر A ایک غیر نادر قالب ہو۔

1.5.5 ایڈجائنٹ کی مدد سے قالب کا ضربی معکوس (Multiplicative Inverse by Adjoint Method)

اگر $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی 2-by-2 قالب ہو تو قالب M کا ضربی معکوس معلوم کرنے کے لیے پہلے قالب M کا غیر نادر ہونا ضروری ہے۔ چونکہ ایک غیر نادر قالب کا مقطع غیر صفر ہونا ضروری ہے۔ اس لیے M کا مقطع معلوم کر کے اس کے غیر صفر ہونے کی تصدیق کی جائے۔

یعنی

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

اور

$$\text{Adj } M = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

پس قالب M کا ضربی معکوس متعارف اور ظاہر یوں کیا جاتا ہے

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj } M}{|M|}$$

مثلاً اگر

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

تو

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - (-1) = -6 + 1 = -5 \neq 0$$

پس

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{-5} = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

چونکہ

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times\frac{3}{5} - \frac{1}{5} & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} - \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = A^{-1}A$$

نوٹ: $I^{-1} = I$

1.5.6 تصدیق کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ہم مرتبہ 2-by-2 غیر نادر قالب ہوں

تو $\det A = 3\times0 - (-1)\times1 = 1 \neq 0$ اور $\det B = 0\times2 - 3(-1) = 3 \neq 0$

پس A^{-1} اور B^{-1} موجود ہوں گے۔ اسی طرح $(AB)^{-1}$ کا حصول بھی ممکن ہوگا۔ اس لیے:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times0+1\times3 & 3\times(-1)+1\times2 \\ -1\times0+0\times3 & -1\times(-1)+0\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اور

$$\Rightarrow \det(AB) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1 - (-1)\times0 = 3 \neq 0$$

پس

$$\text{بائیں طرف} = (AB)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اب $B^{-1}A^{-1}$ کے حصول کے لیے ہم B^{-1} اور A^{-1} حاصل کرتے ہیں۔ یعنی

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{دائیں طرف} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\times0+1 & 2\times(-1)+1\times3 \\ -3\times0+0\times1 & -3\times(-1)+0\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0+1 & -2+3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (AB)^{-1} = \text{بائیں طرف}$$

پس قانون $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق مکمل ہوئی۔

مشق 1.5

1۔ درج ذیل قالبوں کے مقطع معلوم کیجیے۔

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں میں سے کون سے نادر ہیں اور کون سے غیر نادر؟ الگ الگ کیجیے۔

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $C = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iv) $D = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

3۔ نیچے دیے ہوئے قالبوں کے ضربی معکوس معلوم کیجیے (اگر ممکن ہو)۔

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

(iii) $C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ ، (iv) $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ تو درج ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)\, A = (\det A)I$

(ii) $BB^{-1} = I = B^{-1}B$

5۔ قالبوں کے جوڑوں میں سے ثابت کیجیے کہ ہر ایک قالب دوسرے قالب کا ضربی معکوس ہے یا نہیں۔

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

6۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ اور $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ تو تصدیق کیجیے کہ

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ii) $(DA)^{-1} = A^{-1}D^{-1}$

1.6 دو ہمزاد مساواتوں کا حل (Solution of Simultaneous Linear Equations)

دو مختلف متغیرات x اور y میں دو مختلف لینئر (linear) مساواتوں کو عام طور پر یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

جبکہ a، b، c، d، m، n قدرتی اعداد ہیں

یہ مساواتیں باہم ایک ضابطے یا سسٹم (system) کا تصور دیتی ہیں۔

ذیل میں ہم ان مساواتوں کا باہم حل مندرجہ ذیل طریقوں سے معلوم کرتے ہیں۔

(i) مساواتوں کے قالب کے معکوس کے طریقہ سے (ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

(i) دی ہوئی مساواتوں کے قالب کے معکوس قالب کا طریقہ

دیے ہوئے سسٹم کی دو متغیرات x اور y میں دو مختلف مساواتیں

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

اس سسٹم سے وابستہ ایک 2-by-2 قالب اور دوسرے 2-by-1 قالبوں کا تعلق کچھ یوں ظاہر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

یا

$$AX = B$$

جبکہ

$$B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \text{ اور } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{، } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

چونکہ متغیرات x اور y کی قیمتوں کو جاننا سسٹم کا حل ہوگا اس لیے:

$$X = A^{-1}B \quad , \quad |A| = ad - bc \text{ جبکہ}$$

$$X = \frac{\text{Adj A}}{|A|} \times B \quad \because \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj A}}{|A|} \text{ اور } |A| \neq 0$$

یا

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{dm - bn}{ad - bc} \\ \dfrac{-cm + an}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

پس

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}$$

اور

$$y = \frac{-cm + an}{ad - bc}$$ مطلوبہ حل ہے۔

(ii) کریمر کا قانون (Cramer's Rule)

اگر

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

ہوتو

$$B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \text{ اور } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{، } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یعنی

$$AX = B$$

یا

$$X = A^{-1}B$$

یا

$$X = \frac{\text{Adj A}}{|A|} \times B \qquad (|A| \neq 0)$$

یا

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}}{|A|}$$

یا

$$= \frac{\begin{bmatrix} dm - bn \\ -cm + an \end{bmatrix}}{|A|}$$

پس

$$x = \frac{dm - bn}{|A|} \quad = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{an - cm}{|A|} \quad = \frac{|A_y|}{|A|}$$

جبکہ

$$|A_x| = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$$

اور

$$|A_y| = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$$

مثال 1 دی ہوئی مساواتوں کو قالبوں کے ضربی معکوس کی مدد سے باہم حل کیجیے۔

$$4x - 2y = 8$$
$$3x + y = -4$$

حل **پہلا قدم :** قالبوں کی مدد سے دی ہوئی مساواتوں کو قالبی مساواتوں میں تبدیل کرنا

جیسا کہ

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

دوسرا قدم : دی ہوئی مساواتوں میں متغیرات کے عددی سروں کا قالب

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

جس کا مقطع $\det M = 4 \times 1 - 3(-2) = 4 + 6 = 10 \neq 0$

پس M ایک غیر نادر قالب ہے جس کا ضربی معکوس ممکن ہے۔

جس میں

$$MX = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

تیسرا قدم : پس

$$X = M^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 8 - 8 \\ -24 - 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

اور $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

قالبوں کے برابری کے تصور کے استعمال سے

نتیجتاً $x = 0$ اور $y = -4$ مطلوبہ حل ہے۔

مثال 2 دی ہوئی مساواتوں کو کریمر کے قانون کی مدد سے حل کریں۔

$$3x - 2y = 1$$
$$-2x + 3y = 2$$

حل چونکہ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$، $A_x = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $A_y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

اور $|A| = 9 - 4 = 5 \neq 0$ اس لیے A غیر نادر قالب ہے۔

پس $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ اور $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$

جبکہ

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$$

اور

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{5}$$

$$= \frac{6+2}{5} = \frac{8}{5}$$

پس $x = \dfrac{7}{5}$ اور $y = \dfrac{8}{5}$ مطلوبہ حل ہے۔

مثال 3 اگر ایک مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی کے تین گنا سے 6 سم کم ہو اور اس کا احاطہ 140 سم ہو تو مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

حل اگر مستطیل کی چوڑائی x سم ہو تو شرائط کے مطابق

مستطیل کی لمبائی $= y = 3x - 6$

مستطیل کا احاطہ $= 2x + 2y = 140$

پس $x + y = 70$

اور $3x - y = 6$

دونوں مساواتوں کو قالبوں کی شکل میں لکھنے سے

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1) - 3\times 1 = -1 - 3 = -4 \neq 0$$

اس لیے اس کا ایک مستقل حل ممکن ہے اور $X = A^{-1}B$ ہے۔

جبکہ
$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|}$$

اور
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 70 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -70-6 \\ -210+6 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} -76 \\ -204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{76}{4} \\ \frac{204}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 51 \end{bmatrix}$$

پس قالبوں کی مساوی خاصیت کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 51 \end{bmatrix}$$

لہٰذا مستطیل کی چوڑائی $x = 19$ سم

مستطیل کی لمبائی $y = 51$ سم

حل کی درستی کی تصدیق کے لیے

مستطیل کا احاطہ $= p = 2\times19 + 2\times51$

$= 38 + 102$

$= 140$ سم

مستطیل کی لمبائی $= y = 3(19) - 6 = 57 - 6 = 51$ سم

مشق 1.6

1۔ قالبوں کی مدد سے اگر ممکن ہو تو دی ہوئی لینیئر مساواتوں کے جوڑوں میں متغیرات x اور y کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے (ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

(i) $2x - 2y = 4$, $3x + 2y = 6$

(ii) $2x + y = 3$, $6x + 5y = 1$

(iii) $4x + 2y = 8$, $3x - y = -1$

(iv) $3x - 2y = -6$, $5x - 2y = -10$

(v) $3x - 2y = 4$, $-6x + 4y = 7$

(vi) $4x + y = 9$, $-3x - y = -5$

(vii) $2x - 2y = 4$, $-5x - 2y = -10$

(viii) $3x - 4y = 4$, $x + 2y = 8$

نیچے دیے ہوئے عملی زندگی کے مسائل کو حل کیجیے۔

(i) قالبوں کے معکوس کی مدد سے

(ii) کریمر کے قانون کی مدد سے

2۔ اگر ایک مستطیل کی لمبائی اس کی چوڑائی سے چار گنا ہو اور اس کا احاطہ 150 سم ہو تو اس مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔

3۔ ایک مستطیل کے دو اضلاع کی لمبائی میں 3.5 سم کا فرق ہے۔ ان دونوں اضلاع کی لمبائی معلوم کیجیے جبکہ مستطیل کا احاطہ 67 سم ہو۔

4۔ ایک مساوی الساقین مثلث کا تیسرا زاویہ باقی دو برابر زاویوں کے مجموعہ سے 16° کم ہے۔ مثلث کے تینوں زاویوں کی مقدار معلوم کریں۔

5۔ ایک قائمہ زاویہ مثلث میں ایک حادہ زاویہ کی مقدار دوسرے حادہ زاویہ کی مقدار کے دوگنا سے 12° زیادہ ہے۔ مثلث کے دونوں حادہ زاویوں کی مقدار معلوم کیجیے۔

6۔ دو کاریں سفر کے دوران ایک دوسرے سے 600 km فاصلہ پر ہیں اور ایک دوسری کی طرف سفر کر رہی ہیں۔ اگر ان کی رفتار میں 6 km فی گھنٹا کا فرق ہو اور $4\frac{1}{2}$ گھنٹے کے سفر کے بعد ان کے درمیان فاصلہ 123 km رہ جائے تو ہر کار کی رفتار معلوم کیجیے۔

اعادہ مشق 1

1۔ درج ذیل کے درست جوابات کا انتخاب کیجیے۔

(i) قالب $[1 \quad 2]$ کا درجہ .... ہے۔

(a) 2-by-1 (b) 1-by-2
(c) 1-by-1 (d) 2-by-2

(ii) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ کو .... قالب کہا جاتا ہے۔

(a) صفری (b) سکیلر
(c) وحدانی (d) نادر

(iii) کونسا درجہ ایک مربعی قالب کا ہے ....؟

(a) 2-by-2 (b) 1-by-2
(c) 2-by-1 (d) 3-by-2

(iv) قالب $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ کے ٹرانسپوز قالب کا درجہ ہے۔ ....

(a) 3-by-2 (b) 2-by-3

(b) 3-by-1 (c) 1-by-3

(v) $\text{Adj}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ برابر ہے۔ ....

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) ضربی حاصل $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $[x \quad y]$ برابر ہے۔ ....

(a) $[2x + y]$ (b) $[x - 2y]$

(c) $[2x - y]$ (d) $[x + 2y]$

(vii) اگر $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$ ہوتو x برابر ہے۔ ....

(a) 9 (b) −6

(c) 6 (d) −9

(viii) اگر $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + X$ تو X برابر ہے۔ ....

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2۔ جملوں کو مکمل کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ کو کہا جاتا ہے............ قالب۔

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ کو کہا جاتا ہے............ قالب۔

(iii) قالب $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ کا جمعی معکوس قالب............ ہے۔

(iv) عام طور پر ضربی قالب BA .... AB۔

(v) قالب A + B ممکن ہے اگر A اور B کا مرتبہ............ ہے۔

(vi) قالب اگر اس کے کالم اور قطاروں کی تعداد برابر ہو۔ .... قالب کہا جاتا ہے

3۔ اگر $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3 & 4 \\ 6 & b-1 \end{bmatrix}$ تو ارکان b اور a کی قیمت معلوم کیجیے۔

4۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ تو درج ذیل قالب معلوم کیجیے۔

(i) $2A + 3B$ (ii) $-3A + 2B$

(iii) $-3(A + 2B)$ (iv) $\frac{2}{3}(2A - 3B)$

5۔ قالب X معلوم کیجیے۔ اگر $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

6۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ تو ثابت کیجیے۔

$AB \neq BA$

7۔ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ تو ذیل کی تصدیق کیجیے۔

(i) $(AB)^t = B^tA^t$ (ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

خلاصہ

☆ حقیقی اعداد کا ایک مستطیلی افقی اور عمودی قطاری خاکہ جو بریکٹ سے محیط کیا گیا ہو ایک قالب کہلاتا ہے۔

☆ قالب A ایک مستطیلی قالب کہلاتا ہے اگر اس میں افقی قطاروں کی تعداد اور عمودی کالموں کی تعداد برابر نہ ہو۔

☆ قالب A ایک مربعی قالب کہلاتا ہے اگر A میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر ہو۔

☆ قالب A ایک قطاری قالب کہلاتا ہے اگر A میں صرف ایک قطار ہو۔

☆ قالب A ایک کالمی قالب کہلاتا ہے اگر A میں صرف ایک کالم ہو۔

☆ قالب A ایک صفری یا (null) قالب کہلاتا ہے اگر A کا ہر رکن صفر ہو۔

☆ اگر A ایک قالب ہو تو A^t ایک نیا قالب ہے جس کو A کا ٹرانسپوز قالب کہتے ہیں جو قالب A کی قطاروں کو بالترتیب کالموں میں تبدیل کرنے یا کالموں کو بالترتیب A کی قطاروں میں تبدیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

☆ ایک مربعی قالب کو سیمٹرک (symmetric) قالب کہتے ہیں اگر $A^t = A$

☆ (A–) کو قالب A کا منفی قالب کہتے ہیں جسے قالب A کے تمام ارکان کو ان کے منفی ارکان میں بدل دینے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

☆ ایک مربعی قالب M کو ایک سکیو سیمٹرک (skew symmetric) قالب کہتے ہیں۔ اگر $M^t = -M$

☆ ایک مربعی قالب M ایک وتری قالب کہلاتا ہے اگر کم از کم ایک وتری رکن صفر نہ ہو اور غیر وتری تمام ارکان صفر ہوں۔

☆ ایک وتری قالب وحدانی قالب کہلاتا ہے اگر اس میں تمام وتری ارکان 1 ہوں۔

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ کو 3-by-3 وحدانی (identity) قالب کہتے ہیں۔

☆ کوئی بھی دو قالب A اور B ایک دوسرے کے مساوی یا برابر کہلائیں گے اگر

(i) B کا مرتبہ = A کا مرتبہ

(ii) A اور B کے متناظرہ ارکان آپس میں برابر ہوں

☆ کوئی بھی دو قالبوں M اور N پر جمع کا عمل اس وقت ممکن ہوگا اگر، N کا مرتبہ = M کا مرتبہ

☆ فرض کیا قالب A 2-by-3 مرتبہ کا ہے تو ہم مرتبہ قالب B قالب A کا جمعی ذاتی قالب ہوگا اگر

$$B + A = A = A + B$$

☆ دو ہم مرتبہ قالب A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلائیں گے۔ اگر

$$B + A = O = A + B$$

☆ قالب B ایک دوسرے قالب A کا وحدانی ذاتی (identity) قالب کہلاتا ہے۔ اگر

بلحاظ ضربی عمل $BA = A = AB$

☆ اگر $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک 2-by-2 مرتبے کا قالب ہے اور ایک حقیقی عدد قالب M کا مقطع کہلاتا ہے جو ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

☆ ایک مربعی قالب M غیر نادر کہلاتا ہے۔ اگر قالب M کا مقطع صفر کے برابر نہ ہو۔

☆ ایک مربعی قالب M نادر قالب کہلاتا ہے اگر M کا مقطع صفر ہو۔

☆ اگر قالب $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہو تو اس کا ایڈ جائنٹ (adjoint) متعارف اور ظاہر یوں کیا جاتا ہے۔

$$\text{Adj } M = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

☆ اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہو تو اس کا ضربی معکوس

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\text{ Adj } M$$

جبکہ $\det M = ad - bc \neq 0$

☆ مندرجہ ذیل قوانین بلحاظ قالبوں کے جمعی عمل مصدقہ ہیں۔

(i) $M + N = N + M$ (قانون مبادلہ)

(ii) $(M + N) + T = M + (N + T)$ (قانون تلازم)

☆ دو قالبوں M اور N کے ضربی عمل سے قالب MN کا حاصل ممکن ہے۔ اگر

N میں قطاروں کی تعداد = M میں کالموں کی تعداد

اور عام طور پر $MN \neq NM$

(i) $(MN)T = M(NT)$ (قانون تلازم بلحاظ ضرب)

(ii) $M(N+T) = MN + MT$

(iii) $(T+N)M = TM + NM$

(تقسیمی قانون)

☆ (iv) $(MN)^t = N^t M^t$ (قانون ٹرانسپوز)

(v) $(MN)^{-1} = N^{-1} M^{-1}$ (قانون معکوس)

(vi) $MM^{-1} = I = M^{-1}M$

☆ دو مندرجہ ذیل مساواتوں کا ایک مستقل باہمی حل ممکن ہے

$$ax + by = m$$
$$cx + dy = n$$

اگر عددی سروں کا قالب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ غیر نادر ہو۔

اور سسٹم کی قالبی مساوات $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ ہو

اور ان کے حل کے لیے یوں لکھا جائے $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

ضربی عمل کے بعد قالبوں کے برابری کے اصول سے x اور y کی قیمتوں کا حصول حل تصور ہوگا۔

کریمر قانون میں مندرجہ بالا مساواتوں کا قالبوں کی مدد سے یوں ہوگا:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{اور} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{جبکہ} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

یونٹ 2

حقیقی اور غیر حقیقی (کمپلیکس) اعداد

(REAL AND COMPLEX NUMBERS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

2.1 حقیقی اعداد (Real Numbers)

2.2 حقیقی اعداد کی خصوصیات (Properties of Real Numbers)

2.3 مجذور اور جذری مقداریں (Radicals and Radicands)

2.4 قوت نما کے قوانین (Laws of Exponents / Indices)

2.5 کمپلیکس اعداد (Complex Numbers)

2.6 کمپلیکس اعداد کے بنیادی عوامل (Basic Operations on Complex Numbers)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ما حصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر علمی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں کہ

☆ یاد داشت میں لانا کہ مکمل حقیقی اعداد کا سیٹ ناطق اور غیر ناطق اعداد کا یونین سیٹ ہوتا ہے۔

☆ حقیقی اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنا۔

☆ ایسے اعداد کو نمبر لائن پر واضح کرنا جن کا اعشاری حصہ محدود یا اختتام پذیر یا لامحدود یا غیر اختتام پذیر تکراری ہو۔

☆ ناطق اور غیر ناطق اعداد کو اعشاری طور پر ظاہر کرنا۔

☆ حقیقی اعداد کی خصوصیات کو جاننا۔

☆ جذری اور مجذور مقداروں کے تصورات کی وضاحت کرنا۔

☆ جذری جملوں کو قوت نمائی جملوں میں تبدیل کرنا اور قوت نمائی جملوں کو جذری جملوں میں بدلنا۔

☆ بنیاد یا اساس، قوت نما اور قیمت کے تصورات کو یاد داشت میں لانا۔

☆ قوت نمائی کے قوانین کی مدد سے جملوں (مقداروں) کو حقیقی قوت نمائی میں مختصر کرنا۔

☆ کمپلیکس اعداد کے تصور کی تعریف کرنا۔ اور ایک کمپلیکس عدد z کو $z = a + ib$ میں ظاہر کرنا جس میں a اور b دو حقیقی اعداد ہوں اور $i = \sqrt{-1}$ خیالاتی (imaginary) عدد ہو۔

☆ $z = a + ib$ میں a عدد z کا حقیقی حصہ اور b خیالاتی حصہ سمجھنا۔

☆ کمپلیکس عدد کے کانجوگیٹ (conjugate) کی تعریف کرنا۔

☆ دیے ہوئے دو کمپلیکس اعداد کے درمیان برابری کا تصور جاننا۔

☆ کمپلیکس اعداد پر جمع وتفریق وضرب اور تقسیم کے عوامل کی تعریف اور وضاحت کرنا۔

تعارف

عدد کا تصور علم ریاضیات کی بنیاد ہے اور ہم مختلف اعداد کی اقسام کو روزانہ عملی زندگی میں استعمال میں لاتے ہیں۔ اسی لیے اعداد کی اقسام کے بارے میں باخبر ہونا ضروری ہو جاتا ہے۔

اس یونٹ میں ہم حقیقی اور کمپلیکس اعداد کو زیر بحث لائیں گے اور ان کی خصوصیات بھی شامل ہوں گی۔ حقیقی اعداد اور نمبر لائن کے نقاط کے درمیان (1 – 1) کی مطابقت قائم ہے۔ جمع وتفریق وضرب اور تقسیم کے عوامل اس یونٹ میں ہم کمپلیکس اعداد کی مناسبت سے بھی زیر بحث لائیں گے۔

2.1 حقیقی اعداد (Real Numbers)

حقیقی اعداد کے تصور سے پہلے ہم مندرجہ ذیل اعداد کے سیٹ کے بارے یادداشت میں لاتے ہیں۔

قدرتی اعداد (Natural Numbers)

اعداد .... ,4 ,3 ,2 ,1 جو مختلف اشیا کی گنتی کرنے میں استعمال ہوتے ہیں قدرتی اعداد کہلاتے ہیں۔ سیٹ N جس میں تمام قدرتی اعداد شامل ہوتے ہیں کو یوں ظاہر کیا جاتا ہے:

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

مکمل اعداد (Whole Numbers)

اگر سیٹ N میں نمبر 0 شامل کر لیا جائے تو سیٹ $W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ مکمل اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

صحیح اعداد (Integers)

سیٹ $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ بشمول مثبت قدرتی اعداد، منفی قدرتی اعداد اور '0' تمام صحیح اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

2.1.1 حقیقی اعداد کا سیٹ (Set of Real Numbers)

سب سے پہلے ہم ناطق اور غیر ناطق اعداد کے سیٹوں کو اپنی یادداشت میں لاتے ہیں۔

ناطق اعداد (Rational Numbers)

ایسے اعداد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں لکھے جا سکیں، جبکہ p اور q دونوں صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ تمام ناطق اعداد کے سیٹ کو Q سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

ایسے اعداد جو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں نہیں لکھے جا سکتے، جب کہ p اور q دو صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$، غیر ناطق اعداد کہلاتے ہیں۔ تمام غیر ناطق اعداد کے سیٹ کو Q' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جیسا کہ:

$$Q' = \left\{ x \mid x \neq \frac{p}{q}, p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

مثلاً $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، π اور e تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

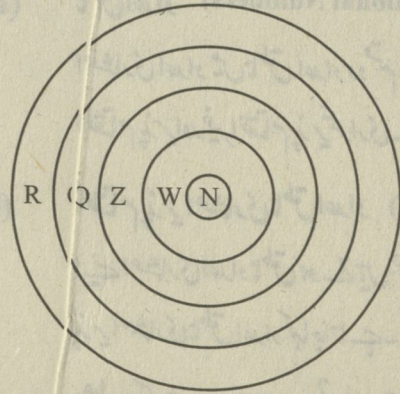
تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد کا سیٹ حقیقی اعداد کا سیٹ R جانا اور مانا جاتا ہے۔

پس $R = Q \cup Q'$

جب کہ Q اور Q' دونوں حقیقی اعداد کے سیٹ R کے تحتی سیٹ ہیں۔

اور $Q \cap Q' = \phi$

نوٹ:

(i) $N \subset W \subset Z \subset Q$

(ii) Q اور Q' ایک دوسرے کے کمپلیمنٹ (Complement) سیٹ ہیں۔

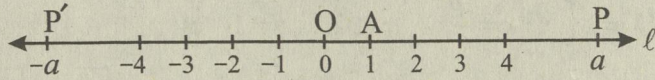
(iii) اگر p ایک مفرد عدد ہو تو $\sqrt{p}$ ایک غیر ناطق عدد ہے۔

(iv) غیر مربعی مثبت صحیح اعداد کا جذر غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

i.e., $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

2.1.2 حقیقی اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنا (Depiction of Real Numbers on Number Line)

تمام حقیقی اعداد جیومیٹری میں ہر نمبر لائن ℓ کے نقاط کے طور پر اس طرح جانے جاتے ہیں کہ ہر حقیقی عدد a نمبر لائن کے ایک ہی نقطہ سے مناسبت رکھتا ہے اور نمبر لائن ℓ پر نقطہ P سے ایک اور صرف ایک ہی حقیقی عدد مناسبت رکھتا ہے۔ اس طرح کی مناسبت کو (1 – 1) مطابقت کہتے ہیں۔ اس مطابقت کو ہم اگلے صفحہ پر قائم کرتے ہیں۔

پہلے نیچے دی ہوئی افقی نمبر لائن ℓ پر ہم ایک نقطہ O بطور مبداء (origin) انتخاب کرتے ہیں اور اس کی مطابقت عدد '0' (zero) سے قائم کرتے ہیں۔ علم ریاضی کی روایات کے طور پر نقطہ O کے دائیں طرف مثبت حقیقی اعداد اور بائیں طرف منفی حقیقی اعداد لیے جاتے ہیں۔ اگر نمبر 1 کی مطابقت میں نقطہ A لیا جائے جو قطعہ خط OA کی لمبائی کو یونٹ سے ظاہر کرے تو حقیقی اعداد کی نقطہ P سے مطابقت قائم ہو سکتی ہے۔ اسی طرح نقطہ $P(a)$ ظاہر ہوتا ہے۔ جس میں اگر حقیقی عدد a نقطہ P کا کوآرڈینیٹ سمجھا جائے تو نقطہ $P'(-a)$ نقطہ $P(a)$ کے مبداء سے دوسری طرف لیکن اتنے ہی فاصلے پر $(-a)$ کی مطابقت میں ہوگا۔ اسی طرح حقیقی اعداد اور نمبر لائن کے نقاط میں مطابقت قائم ہو جاتی ہے۔

2.1.3 نمبر لائن پر اعشاری (Decimal) اعداد کی مناسبت کی وضاحت

(Demonstration of a Number with Terminating and Non-Terminating Decimals on the Number Line)

پہلے، ہم ناطق اور غیر ناطق اعشاری اعداد کے تصورات کے بارے میں روشناس کراتے ہیں۔

(a) ناطق اعداد (Rational Numbers)

اعشاری اعداد میں ناطق اعداد دو قسم کے ہیں۔

اختتام پذیر اور غیر اختتام پذیر تکراری۔

(i) اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد (Terminating Decimal Fractions)

ایسے اعشاری اعداد ناطق ہوتے ہیں جن کے اعشاری اعداد کی تعداد گنتی میں لائی جا سکے۔ ایسے اعشاری اعداد کو اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\frac{2}{5} = 0.4$ اور $\frac{3}{8} = 0.375$ اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد ہیں۔

(ii) غیر اختتام پذیر تکراری اعشاری اعداد (Recurring and Non-Terminating Numbers)

ایسے اعشاری اعداد جو غیر اختتام پذیر ہوں جن میں اعشاری عدد یا اعداد کا ایک بلاک بار بار اعشاری حصہ میں دہرائے جا رہے ہوں تکراری اعشاری اعداد کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\frac{2}{9} = 0.2222...$ اور $\frac{4}{11} = 0.363636....$

تکراری غیر اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد ہیں۔

(b) غیر ناطق اعداد (Irrational Numbers)

مشاہدہ میں یہ بات آئی ہے کہ غیر ناطق اعداد نہ تو اختتام پذیر اعشاری اور نہ ہی غیر اختتام پذیر تکراری اعشاری اعداد ہیں۔ اعشاری غیر ناطق اعداد غیر اختتام پذیر ہوں گے اور اعشاری اعداد میں سے کوئی بھی عدد یا اعداد کا ایک بلاک یکسر دہرایا نہیں جائے گا۔

مثلاً $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ ، $\pi = 3.141592654\ldots$ ، اور $e = 2.718281829\ldots$

وغیرہ تمام اعداد نہ ہی اختتام پذیر اور نہ ہی تکراری اعشاری حصہ رکھتے ہیں۔

درج ذیل مثالوں سے مزید اس کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو $\frac{p}{q}$ کی شکل میں ظاہر کریں۔ جبکہ $p, q \in Z$ اور $q \neq 0$

(a) $0.\overline{3} = 0.333\ \ldots\ldots$ (b) $0.\overline{23} = 0.232323\ \ldots\ldots$

حل

(a) اگر $x = 0.\overline{3}$

$$x = 0.3333\ldots \quad \text{(i)}$$

چونکہ صرف ایک ہی عدد 3 لامتناہی طور پر دہرایا جا رہا ہے۔ اس لیے ہم (i) کے دونوں طرف 10 سے ضرب دیں گے۔

پس
$$10x = (0.3333\ldots) \times 10$$

$$10x = 3.3333\ldots \quad \text{(ii)}$$

(i) کو (ii) میں سے تفریق کرنے سے، ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$10x - x = (3.3333\ldots) - (0.3333\ldots)$$

$$9x = 3$$

اور
$$x = \frac{1}{3}$$

نتیجتاً
$$0.\overline{3} = \frac{1}{3}$$

پس x ایک ناطق عدد ہے۔

(b) فرض کیا $x = 0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\ 23\ \ldots\ldots$

چونکہ دو اعداد کا بلاک 23 دہرایا جا رہا ہے۔ اس لیے ہم 100 سے دونوں طرف ضرب دیں گے۔

یعنی
$$100x = 23.\overline{23}$$

$$\Rightarrow \quad 100x = 23 + 0.\overline{23} = 23 + x$$

$$\Rightarrow \quad 100x - x = 23$$

$$\Rightarrow \quad 99x = 23$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{23}{99}$$

پس $0.\overline{23} = \frac{23}{99}$ مطلوبہ ناطق عدد ہے۔

2.1.4 نمبر لائن پر ناطق اور غیر ناطق اعداد کو ظاہر کرنا

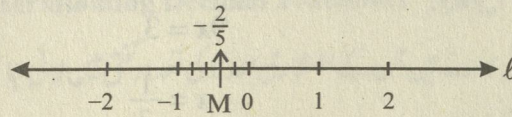
(Representation of Rational and Irrational Numbers on Number Line)

اختتام پذیر اعشاری ناطق اعداد اور غیر اختتام پذیر ناطق اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کرنے کی خاطر ہم نمبر لائن پر ناطق اعداد $\frac{m}{n}$ اور $\frac{-m}{n}$ سے وابستہ نقاط کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ m اور n مثبت صحیح اعداد ہیں۔ اس غرض سے ہم ہر یونٹ اعشاری بلاک کو n برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو نمبر لائن پر اعشاری mth حصہ مبداء سے دائیں طرف $\frac{m}{n}$ کے نقطہ کو ظاہر کرتا ہے اور مبداء سے بائیں طرف اتنے ہی فاصلہ پر $\frac{-m}{n}$ کے نقطہ کو ظاہر کرتا ہے۔

مثال مندرجہ ذیل اعشاری اعداد کو نمبر لائن پر ظاہر کریں۔

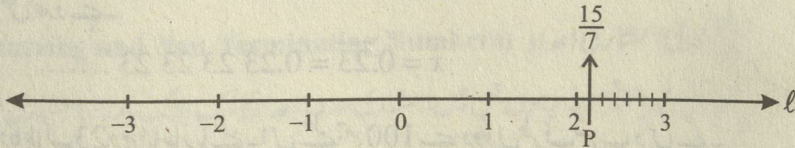
(i) $-\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{15}{7}$ (iii) $-1\frac{7}{9}$

حل

(i) ناطق نمبر $-\frac{2}{5}$ کو نمبر لائن ℓ پر ظاہر کرنے کی خاطر یونٹ لمبائی $[-1, 0]$ کو نمبر لائن پر پانچ برابر حصوں میں تقسیم کیا۔ دوسرے حصہ کے اختتام پر مبداء سے بائیں طرف $-\frac{2}{5}$ کو ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ M نمبر $-\frac{2}{5}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

(ii) چونکہ، $\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$ اس لیے $\frac{15}{7}$ نمبر لائن پر صحیح اعداد 2 اور 3 کے درمیان واقع ہوگا۔

$\frac{15}{7}$

ℓ

−3 −2 −1 0 1 2 P 3

نمبر لائن پر صحیح اعداد 2 اور 3 کے درمیان فاصلہ کو سات برابر حصوں میں تقسیم کریں نقطہ P نمبر $2\frac{1}{7} = \frac{15}{7}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

(iii) ناطق عدد $-1\frac{7}{9}$، نمبر لائن پر صحیح اعداد 1- اور 2- کے درمیان فاصلہ کو نو برابر حصوں میں تقسیم کرنے سے نقطہ M کو ظاہر کرتا ہے۔ نیچے شکل میں نقطہ M ناطق عدد، $-1\frac{7}{9}$ کو ظاہر کرتا ہے۔

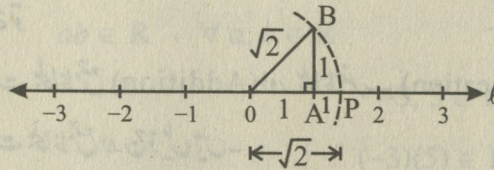
غیر ناطق اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ وغیرہ نمبر لائن ℓ پر مندرجہ ذیل جیومیٹری کی شکل کی بناوٹ سے ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً عدد $\sqrt{2}$ کو یوں ظاہر کرتے ہیں کہ مثلث OAB بنانے سے، $|\overline{OB}| = \sqrt{2}$ اور $|\overline{OP}| = \sqrt{2}$ نمبر لائن پر $\sqrt{2}$ کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔

دراصل نقطہ O کو مرکز مان کر رداس $|\overline{OB}| = \sqrt{2}$ کی لمبائی نمبر لائن پر ظاہر ہوتی ہے۔ نقطہ P نمبر لائن پر $\sqrt{2}$ نمبر کو ظاہر کرتا ہے جو مطلوبہ نقطہ ہے۔

مشق 2.1

1۔ مندرجہ ذیل میں سے ناطق یا غیر ناطق اعداد کی نشاندہی کریں۔

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) π (iv) $\frac{15}{2}$ (v) 7.25 (vi) $\sqrt{29}$

2۔ مندرجہ ذیل ناطق اعداد کو اعشاری اعداد میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\frac{17}{25}$ (ii) $\frac{19}{4}$ (iii) $\frac{57}{8}$

(iv) $\frac{205}{18}$ (v) $\frac{5}{8}$ (vi) $\frac{25}{38}$

3۔ ذیل میں درج کیے ہوئے کون سے جملے درست ہیں یا غلط، نشاندہی کریں۔

(i) $\frac{2}{3}$ ایک غیر ناطق عدد ہے ....۔ (ii) π ایک غیر ناطق عدد ہے............۔

(iii) $\frac{1}{9}$ ایک غیر اختتام پذیر عدد ہے ....۔ (iv) $\frac{3}{4}$ ایک اختتام پذیر عدد ہے ....۔

(v) $\frac{4}{5}$ ایک تکراری کسر ہے ....۔

4۔ درج ذیل اعداد کو نمبر لائن کے نقاط سے ظاہر کیجیے۔

(i) $\frac{2}{3}$ (ii) $-\frac{4}{5}$ (iii) $1\frac{3}{4}$

(iv) $-2\frac{5}{8}$ (v) $2\frac{3}{4}$ (vi) $\sqrt{5}$

5۔ اعداد $\frac{3}{4}$ اور $\frac{5}{9}$ کے درمیان ایک ناطق عدد بتائیے۔

6۔ مندرجہ ذیل تکراری اعداد کو ناطق اعداد $\frac{p}{q}$ میں ظاہر کریں جبکہ p, q اور $q \neq 0$ صحیح اعداد ہوں۔

(i) $0.\overline{5}$ (ii) $0.\overline{13}$ (iii) $0.\overline{67}$

2.2 حقیقی اعداد کی خصوصیات (Properties of Real Numbers)

اگر a اور b دو حقیقی اعداد ہوں تو ان کا حاصل جمع (sum) $a+b$، اور ان کا ضربی حاصل (product) ab یا $a \times b$ یا $a \cdot b$ یا $(a)(b)$ لکھا جائے تو

(a) حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع (Addition) اور بلحاظ ضرب (Multiplication)

حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ جمع درج ذیل ہیں۔

(i) خاصیت بندش (Closure Property)

$$a + b \in R, \forall a, b \in R$$

مثلاً اگر 3- اور 5 سیٹ R کے دو ارکان ہوں تو

$$-3 + 5 = 2 \in R$$

(ii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property)

$$a + b = b + a \ ، \ \forall a, b \in R$$

مثلاً اگر 2 اور 3 سیٹ R کے ارکان ہوں تو

$$2 + 3 = 3 + 2$$

یا $5 = 5$

(iii) خاصیت تلازم (Associative Property)

$$(a + b) + c = a + (b + c) \ ، \ \forall a, b, c \in R$$

مثلاً اگر 5، 7 اور 3 سیٹ R کے ارکان ہوں تو

$$(5 + 7) + 3 = 5 + (7 + 3)$$

یا $12 + 3 = 5 + 10$

یا $15 = 15$

(iv) جمعی ذاتی عنصر (Additive Identity)

حقیقی اعداد کے سیٹ R میں ایک اور صرف ایک رکن 0 موجود ہے جو جمعی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔ جیسا کہ

$$a + 0 = a = 0 + a \ ، \ \forall a \in R$$

(v) جمعی معکوس (Additive Inverse)

حقیقی اعداد کے سیٹ R میں ہر رکن a کا ایک اور صرف ایک ہی جمعی معکوس $-a$ موجود ہے۔ جیسا کہ

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

مثلاً حقیقی عدد 3 کا جمعی معکوس -3 ہے۔ چونکہ

$$3 + (-3) = 0 = (-3) + (3)$$

حقیقی اعداد کی خصوصیات بلحاظ ضرب درج ذیل ہیں۔

(i) خاصیت بندش (Closure Property)

$$ab \in R \ ، \ \forall a, b \in R$$

مثلاً اگر $-3, 5 \in R$

تو $(-3)(5) \in R$

یا $-15 \in R$

(ii) خاصیت مبادلہ (Commutative Property)

$$ab = ba \ ، \ \forall a, b \in R$$

مثلاً اگر $\frac{1}{3}$ اور $\frac{3}{2}$ سیٹ R کے ارکان ہوں تو

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

یا $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(iii) خاصیت تلازم (Associative Property)

$$(ab)c = a(bc) \ ، \ \forall a, b, c \in R$$

مثلاً اگر $2, 3, 5 \in R$ تو

$$(2 \times 3) \times 5 = 2 \times (3 \times 5)$$

یا $6 \times 5 = 2 \times 15$

یا $30 = 30$

(iv) ضربی ذاتی عنصر (Multiplicative Identity)

حقیقی اعداد کے سیٹ R میں ایک اور صرف ایک ہی حقیقی عدد 1 موجود ہے جو ضربی ذاتی عنصر کہلاتا ہے۔

جبکہ $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ ، $\forall\ a \in \mathrm{R}$

(v) ضربی معکوس (Multiplicative Inverse)

سیٹ R میں ہر حقیقی عدد $(a \neq 0)$ کا ضربی معکوس ایک اور صرف ایک نمبر $a^{-1} = \frac{1}{a}$ موجود ہے جس کو a کا ضربی معکوس کہا جاتا ہے۔

جبکہ $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$

یا $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$

مثلاً اگر $5 \in \mathrm{R}$ تو $\frac{1}{5} \in \mathrm{R}$

جبکہ $5 \times \frac{1}{5} = 1 = \frac{1}{5} \times 5$

پس 5 اور $\frac{1}{5}$ ایک دوسرے کے ضربی معکوس ہیں۔

(vi) جمع اور تفریقی عمل پر ضربی عمل تقسیمی خاصیت رکھتا ہے۔

(Multiplication is Distributive over Addition and Subtraction)

$\forall\ a, b, c \in \mathrm{R}$

$a(b + c) = ab + ac$ (بایاں تقسیمی قانون بلحاظ جمع)

$(a + b)c = ac + bc$ (دایاں تقسیمی قانون بلحاظ جمع)

مثلاً

اگر 2 ، 3 اور 5 سیٹ R کے ارکان ہوں تو

$2(3 + 5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$

یا $2 \times 8 = 6 + 10$

یا $16 = 16$

$\forall a, b, c \in \mathrm{R}$

$a(b - c) = ab - ac$ (بایاں تقسیمی قانون بلحاظ تفریق)

$(a - b)c = ac - bc$ (دایاں تقسیمی قانون بلحاظ تفریق)

مثلاً اگر 2 ، 5 اور 3 سیٹ R کے ارکان ہوں تو

$$2(5-3) = 2\times 5 - 2\times 3$$

یا $$2\times 2 = 10 - 6$$

یا $$4 = 4$$

نوٹ:

(i) علامت $\forall$ کے معنی ہیں "سب کے لیے"
(ii) a کا ضربی معکوس a^{-1} ہے چونکہ $a = (a^{-1})^{-1}$

(b) حقیقی اعداد کی برابری کی خصوصیات (Properties of Equality of Real Numbers)

حقیقی اعداد میں برابری کی خصوصیات مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) عکسی خاصیت (Reflexive Property)

$$a = a \ , \ \forall a \in R$$

(ii) تشاکل خاصیت (Symmetric Property)

$$a = b \Rightarrow b = a \quad \forall \ a, b \in R$$

(iii) متعدیت خاصیت (Transitive Property)

$$a = b \ , \ b = c \Rightarrow a = c \quad \forall \ a, b, c \in R$$

(iv) جمعی خاصیت (Additive Property)

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c \ , \forall \ a, b, c \in R$$

(v) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

$$a = b \Rightarrow ac = bc \ ، \forall \ a, b, c \in R$$

(vi) تنسیخی خاصیت بلحاظ جمع (Cancellation Additive Property)

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b \ ، \forall \ a, b, c \in R$$

(vii) تنسیخی خاصیت بلحاظ ضرب (Cancellation Multiplicative Property)

$$ac = bc \ \ c \neq 0 \Rightarrow a = b \ ، \forall \ a, b, c \in R$$

(c) حقیقی اعداد کی نابرابری کی خصوصیات (Properties of Inequality of Real Numbers)

حقیقی اعداد کی نابرابری کی درج ذیل خصوصیات ہیں۔

(i) ثلاثی خاصیت (Trichotomy Property)

$$\forall \ a, b \in R$$

$a < b$ یا $a = b$ یا $a > b$

(ii) متعدیت خاصیت (Transitive Property)

$\forall\ a, b, c \in R$

(a) $a < b \ \wedge \ b < c \Rightarrow a < c$

(b) $a > b \ \wedge \ b > c \Rightarrow a > c$

(iii) جمعی خاصیت (Additive Property)

$\forall\ a, b, c \in R$

(a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

$a < b \Rightarrow c + a < c + b$

(b) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$a > b \Rightarrow c + a > c + b$

(iv) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

(a) $\forall\ a, b, c \in R$ اور $c > 0$

(i) $a > b \Rightarrow ac > bc$

$a > b \Rightarrow ca > cb$

(ii) $a < b \Rightarrow ac < bc$

$a < b \Rightarrow ca < cb$

(b) $\forall\ a, b, c \in R \ \wedge \ c < 0$

(i) $a > b \Rightarrow ac < bc$

$a > b \Rightarrow ca < cb$

(ii) $a < b \Rightarrow ac > bc$

$a < b \Rightarrow ca > cb$

(v) ضربی معکوس خاصیت (Multiplicative Inverse Property)

$\forall\ a, b \in R \ \wedge \ a \neq 0, b \neq 0$

(a) $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(b) $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

مشق 2.2

1۔ مندرجہ ذیل جملوں میں حقیقی اعداد کی خاصیت کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $a + b = b + a$ .... (ii) $(ab)c = a(bc)$ ....

(iii) $7 \times 1 = 7$ .... (iv) $x > y$ یا $x = y$ یا $x < y$............

(v) $ab = ba$ .... (vi) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$............

(vii) $5 + (-5) = 0$ .... (viii) $7 \times \frac{1}{7} = 1$..... ......

(ix) $a > b \Rightarrow ac > bc \; (c > 0)$ ....

2۔ مندرجہ ذیل خالی جگہوں میں حقیقی اعداد کی استعمال کی گئی خاصیت کی نشاندہی کریں۔

$3x + 3(y - x)$

$= 3x + 3y - 3x,$ ....

$= 3x - 3x + 3y,$ ....

$= 0 + 3y,$ ....

$= 3y,$ ....

3۔ درجِ ذیل جملوں میں حقیقی اعداد کی اس خاصیت کا نام درج کیجیے جو استعمال کی گئی ہے۔

(i) $\sqrt{24} + 0 = \sqrt{24}$ ....

(ii) $-\frac{2}{3}\left(5 + \frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)(5) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{2}\right)$..................

(iii) $\pi + (-\pi) = 0$ ....

(iv) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ حقیقی عدد ہے..................

(v) $\left(-\frac{5}{8}\right)\left(-\frac{8}{5}\right) = 1$..................

2.3 ریڈیکلز اور ریڈیکنڈز (Radicals and Radicands)

2.3.1 ریڈیکل اور ریڈیکنڈ کا تصور (Concept of Radical and Radicand)

اگر n ایک مثبت صحیح عدد ہو جو صحیح عدد 1 سے بڑا ہو تو ایک حقیقی نمبر x جو حقیقی نمبر a کا n واں رُوٹ (جذر) ہو ریڈیکل کہلاتا ہے۔ یعنی اگر $x^n = a$ ہو تو $x = \sqrt[n]{a}$ یا $x = (a)^{1/n}$ بطور علامت لکھا جاتا ہے۔

ریڈیکل $\sqrt[n]{a}$ میں علامت $\sqrt{\ }$ ریڈیکل کا نشان کہلاتا ہے اور n کو ریڈیکل کا انڈیکس کہتے ہیں۔
حقیقی نمبر a ریڈیکل نشان کے ساتھ ریڈیکنڈ یا ریڈیکل کی اساس/بنیاد (base) کہلاتا ہے۔

نوٹ:

$\sqrt[2]{a}$ عام طور پر $\sqrt{a}$ لکھا جاتا ہے۔

2.3.2 دیے ہوئے نمبر کی ریڈیکل اور قوت نمائی شکل میں فرق

(Difference between Radical and Exponential Forms)

(i) ریڈیکل شکل میں ریڈیکل کا نشان استعمال کیا جاتا ہے۔ مثلاً $x = \sqrt[n]{a}$ نمبر x کی ریڈیکل شکل ہے۔
$\sqrt[3]{x}$ اور $\sqrt[5]{x^2}$ ریڈیکل شکل کی مثالیں ہیں۔

(ii) قوت نمائی شکل میں ریڈیکل کی جگہ قوت نما استعمال کرتے ہیں۔
مثلاً $x = (a)^{1/n}$ ریڈیکل شکل $x = \sqrt[n]{a}$ کی قوت نمائی شکل ہے۔
اور $x^{3/2}$ اور $x^{2/7}$ قوت نمائی شکل کی مثالیں ہیں۔

ریڈیکلز کی خصوصیات (Properties of Radicals)

اگر $a, b \in R$ اور n، m مثبت صحیح اعداد ہوں تو

(i) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ (ii) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (iii) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

(iv) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a}\,)^m$ (v) $\sqrt[n]{a^n} = a$

2.3.3 ریڈیکل شکل کو قوت نمائی شکل اور قوت نمائی شکل کو ریڈیکل شکل میں تبدیل کرنا

(Transformation of an Expression given in Radical Form to Exponential Form and Vice Versa)

ریڈیکل اور قوت نمائی شکلوں کو باہم تبدیل کرنا درج ذیل مثالوں سے واضح کیا گیا ہے ۔

مثال 1 مندرجہ ذیل میں ہر ریڈیکل شکل کو قوت نمائی شکل میں اور ہر قوت نمائی شکل کو ریڈیکل شکل میں تبدیل کریں۔ تفصیل میں جانے کی ضرورت نہیں۔

(i) $\sqrt[5]{-8}$ (ii) $\sqrt[3]{x^5}$ (iii) $y^{3/4}$ (iv) $x^{-3/2}$

حل

(i) $\sqrt[5]{-8} = (-8)^{1/5}$ (ii) $\sqrt[3]{x^5} = x^{5/3}$

(iii) $y^{3/4} = \sqrt[4]{y^3}$ یا $(\sqrt[4]{y})^3$ (iv) $x^{-3/2} = \sqrt{x^{-3}}$ یا $(\sqrt{x})^{-3}$

مثال 2 $\sqrt[3]{16x^4y^5}$ کو تفصیل سے سادہ ترین ریڈیکل شکل میں لائیں۔

حل

$$\sqrt[3]{16x^4y^5} = \sqrt[3]{(2)(8)(x)(x^3)(y^2)(y^3)}$$ ...... (تجزی کرنے سے)

$$= \sqrt[3]{2xy^2\,(2^3)(x^3)(y^3)}$$ ...... (مکمل مکعب کو ترتیب دینا)

$$= \sqrt[3]{2xy^2}\;\sqrt[3]{(2^3)(x^3)(y^3)}$$ ...... خاصیت (i)

$$= \sqrt[3]{2xy^2}\;\sqrt[3]{2^3}\;\sqrt[3]{x^3}\;\sqrt[3]{y^3}$$ ...... خاصیت (i)

$$= 2xy\,\sqrt[3]{2xy^2}$$ ...... خاصیت (v)

مشق 2.3

1۔ مندرجہ ذیل میں سے ہر ریڈیکل شکل کو قوت نمائی شکل میں اور قوت نمائی شکل کو ریڈکل شکل میں تبدیل کریں۔ تفصیل میں جانے کی ضرورت نہیں۔

(i) $\sqrt[3]{-64}$ (ii) $2^{3/5}$ (iii) $-7^{1/3}$ (iv) $y^{-2/3}$

2۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے بارے میں غلط یا درست کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $5^{1/5} = \sqrt{5}$ (ii) $2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$ (iii) $\sqrt{49} = \sqrt{7}$ (iv) $\sqrt[3]{x^{27}} = x^3$

3۔ مندرجہ ذیل ریڈیکل شکلوں کو ان کی عام شکل میں تبدیل کیجیے۔

(i) $\sqrt[3]{-125}$ (ii) $\sqrt[4]{32}$ (iii) $\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ (iv) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

2.4 قوت نما کے قوانین (Laws of Exponents or Indices)

2.4.1 اساس اور قوت نما کا تصور (Base and Exponent)

قوت نمائی شکل، a^n (پڑھا جائے 'a' کی قوت نما n) میں ہم 'a' کو اساس/بنیاد (base) اور n کو a کی قوت کا انڈیکس کہتے ہیں۔

ہم مندرجہ ذیل قوت نما کے قوانین جانتے ہیں۔

اگر 'a' اور 'b' دو حقیقی اعداد ہوں اور n, m دو مثبت صحیح اعداد ہوں تو

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $(ab)^n = a^n b^n$

(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$

(v) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$، جبکہ $a \neq 0.$

(vi) $a^0 = 1$، جبکہ $a \neq 0.$

(vii) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$، جبکہ $a \neq 0$

2.4.2 قوت نما کے قوانین کا استعمال (Application of Laws of Exponents)

قوت نما کے قوانین کے استعمال کو ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کرتے ہیں۔

مثال 1 قوت نما کے قوانین کی مدد سے مندرجہ ذیل جملوں کو عام شکل میں تبدیل کیجیے (تمام قوت نما مثبت ہوں)۔

(i) $\frac{x^{-2} x^{-3} y^7}{x^{-3} y^4}$

(ii) $\left(\frac{4a^3 b^0}{9a^{-5}}\right)^{-2}$

حل

(i) $\frac{x^{-2} x^{-3} y^7}{x^{-3} y^4} = \frac{x^{-5} y^7}{x^{-3} y^4}, \quad (a^m a^n = a^{m+n})$

$= \frac{y^{7-4}}{x^{-3+5}} = \frac{y^3}{x^2}, \quad \left(\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n\right)$

(ii) $\left(\frac{4a^3 b^0}{9a^{-5}}\right)^{-2} = \left(\frac{4a^{3+5} \times 1}{9}\right)^{-2}, \left(\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, b^0 = 1\right) = \left(\frac{4a^8}{9}\right)^{-2}$

$$= \left(\frac{4a^8}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{4a^8}\right)^{+2}, \qquad \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

$$= \frac{81}{16a^{16}} \qquad \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\right)$$

مثال 2 مندرجہ ذیل کو قوانین کی مدد سے مختصر کیجیے۔

(i) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$ (ii) $\frac{4(3)^n}{3^{n+1} - 3^n}$

حل قوت نما کے قوانین کی مدد سے

(i) $$\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{(125)^{\frac{4}{3}}}{(8)^{\frac{4}{3}}} = \frac{(5^3)^{\frac{4}{3}}}{(2^3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{5^4}{2^4} = \frac{625}{16}$$

(ii) $$\frac{4(3)^n}{3^{n+1} - 3^n} = \frac{4(3)^n}{3^n[3-1]} = \frac{4(3)^n}{2(3^n)} = \frac{4}{2} = 2$$

مشق 2.4

-1 قوت نما کے قوانین کی مدد سے مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{(243)^{-\frac{2}{3}}\ (32)^{-\frac{1}{5}}}{\sqrt{(196)^{-1}}}$ (ii) $(2x^5\, y^{-4})\,(-8x^{-3}\, y^2)$

(iii) $\left(\frac{x^{-2}\, y^{-1}\, z^{-4}}{x^4\, y^{-3}\, z^0}\right)^{-3}$ (iv) $\frac{(81)^n \times 3^5 - (3)^{4n-1}\,(243)}{(9^{2n})(3^3)}$

-2 ثابت کیجیے کہ

$$\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$$

-3 مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{2^{1/3} \times (27)^{1/3} \times (60)^{1/2}}{(180)^{1/2} \times (4)^{-1/3} \times (9)^{1/4}}$ (ii) $\sqrt{\frac{(216)^{2/3} \times (25)^{1/2}}{(.04)^{-1/2}}}$

(iii) $5^{2^3} \div (5^2)^3$ (iv) $(x^3)^2 \div x^{3^2},\ x \neq 0$

2.5 کمپلیکس اعداد (Complex Numbers)

ہم جانتے ہیں کہ ریاضی میں کسی بھی حقیقی عدد کا مربع کبھی بھی منفی نہیں ہوتا۔ پس مساوات $x^2 + 1 = 0$ یا $x^2 = -1$ کا حل حقیقی عدد نہیں ہوسکتا۔ حقیقی اعداد میں اس کمی کو دُور کرنے کے لیے ریاضی دانوں نے حقیقی اعداد کے سیٹ سے بڑا سیٹ ڈھونڈ نکالا جسے کمپلیکس اعداد کے سیٹ کا نام دیا۔ جس میں ایک نیا عدد $\sqrt{-1}$ معلوم کرلیا جس کا مربع منفی عدد ہے۔ اس کو $i = \sqrt{-1}$ سے ظاہر کیا گیا۔ کمپلیکس عدد $\sqrt{-1}$ کو خیالاتی یونٹ نمبر جانا اور مانا گیا ہے۔

یقیناً i ایک حقیقی عدد نہیں کیونکہ اس کا مربع -1 ہے جو کسی بھی حقیقی عدد کا نہیں ہوسکتا۔ یہ ریاضی میں ایک ایسا اضافہ ہے جو نمبر سسٹم کو وسیع حدود تک لے جاتا ہے۔ جس میں تمام مساواتوں $x^2 = -a$ کو بھی حل کرنے کی صلاحیت ہے۔

مساوات $x^2 + 1 = 0$ کے دو حل $\sqrt{-1}$ اور $-\sqrt{-1}$ حاصل ہوتے ہیں۔

نوٹ:

سوئٹزرلینڈ کے ریاضی دان لیونارڈ آئلر (1707 – 1783) نے پہلی دفعہ $i = \sqrt{-1}$ کو عدد کے طور پر پیش کیا۔
اعداد کی قسم $\sqrt{-1}$ ، $\sqrt{-5}$ وغیرہ کو خالص خیالاتی اعداد کہا اور مانا گیا ہے۔

i کی انٹیگرل پاورز (Integral Powers of i)

اگر $i = \sqrt{-1}$ ہو تو آسانی سے i کی انٹیگرل پاورز حاصل کرسکتے ہیں:

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -i$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$$

$$i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1 \quad ,$$ وغیرہ

ایک خالص خیالاتی عدد (imaginary) منفی حقیقی عدد کا جذرالمربع یا ریڈیکل ہے۔

2.5.1 کمپلیکس عدد کی تعریف (Definition of a Complex Number)

ایک عدد $z = a + bi$ ، جس میں $a, b \in \mathrm{R}$ اور $i = \sqrt{-1}$ ایک کمپلیکس عدد کہلاتا ہے اور انگریزی حروف تہجی (alphabet) کے حرف z سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

پس $z = 2 + 3i$ ایک کمپلیکس عدد ہے۔

2.5.2 کمپلیکس اعداد کا سیٹ (Set of Complex Numbers)

تمام کمپلیکس اعداد کا سیٹ انگریزی (alphabet) کے حرف C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یعنی

$$C = \{z \mid z = a + bi, \ a, b \in R, \ i = \sqrt{-1}\}$$

یادر ہے کہ اعداد a اور b کمپلیکس نمبر z کے حصے ہیں جو بالترتیب حقیقی اور خیالاتی (imaginary) پارٹ یا حصے کہلاتے ہیں۔

جیسا کہ

$R(z) = a =$ z کا حقیقی حصہ

اور $\text{Im}(z) = b =$ z کا خیالاتی حصہ

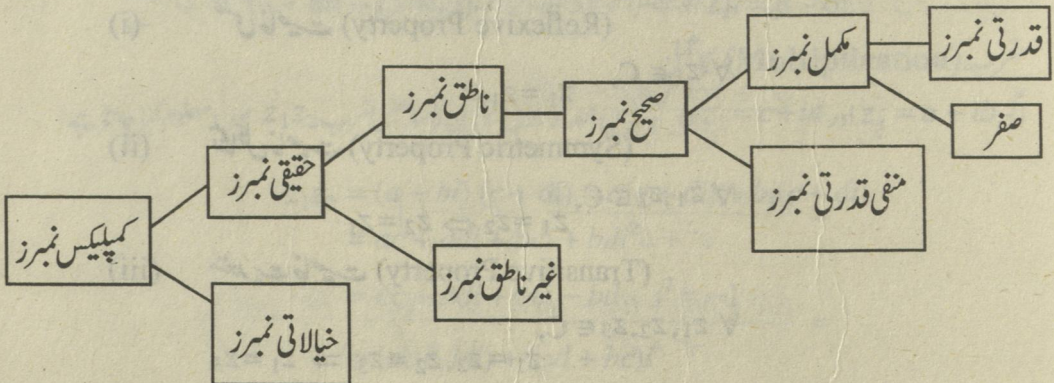
مشاہدہ کیجیے کہ

(i) ہر حقیقی عدد a ایک کمپلیکس عدد $a + 0i$ ہوگا جس میں $b = 0$، پس ہر حقیقی عدد ایک کمپلیکس عدد بھی ہے۔

(ii) $z = 0 + ib$ میں اگر $a = 0$ ہو تو ظاہر ہوتا ہے کہ ہر کمپلیکس عدد حقیقی عدد نہیں ہے۔

(iii) اگر $a + bi$ میں $a = 0$ ہو تو $z = ib$ ایک خیالاتی عدد ہے۔ خیالاتی اعداد کا سیٹ بھی سیٹ C میں شامل ہے۔

(iv) اگر $a = b = 0$ ہو تو $z = 0 + i0$ یعنی نمبر 0 (صفر) ایک کمپلیکس عدد بھی ہے۔

تفصیل کی خاطر تمام کمپلیکس اعداد کو نیچے تصویر (diagram) میں ظاہر کیا گیا ہے:

2.5.3 کانجوگیٹ کمپلیکس عدد (Conjugate of a Complex Number)

اگر ہم کمپلیکس عدد $z = a + bi$ میں i کو $-i$ میں بدل دیں تو نیا کمپلیکس عدد $a - bi$ کمپلیکس عدد z کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔ جو کو $\overline{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور (بار z) پڑھا جاتا ہے۔

مثلاً اگر $z = -1 - i$ تو $\overline{z} = -1 + i$

غیر حقیقی اعداد $a + bi$ اور $a - bi$ باہم ایک دوسرے کا کانجوگیٹ کہلاتے ہیں۔

نوٹ

(i) $z = \overline{\overline{z}}$

(ii) ایک حقیقی عدد $z = a = a + 0i$ کا نجوگیٹ خود z ہی ہے چونکہ
$\overline{z} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a$

(iii) ایک حقیقی عدد کا، کانجوگیٹ خود حقیقی عدد ہی ہے۔

2.5.4 کمپلیکس اعداد میں برابری کا تصور اور اس کی خصوصیت
(Equality of Complex Numbers and its Properties)

اگر a, b, c اور d حقیقی عدد ہوں اور $a + bi$ ، $c + di$ دو کمپلیکس اعداد ہوں تو
$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \;,\; b = d$

مثلاً، اگر $2x + y^2 i = 4 + 9i$
تو $2x = 4 \;,\; y^2 = 9,$
یعنی کہ $x = 2 \;,\; y = \pm 3$

حقیقی اعداد کی برابری کی تمام خصوصیات کمپلیکس اعداد کے سیٹ C میں بھی موجود ہیں۔

(i) عکسی خاصیت (Reflexive Property)

$\forall\, z_1 \in C,\quad z_1 = z_1$

(ii) تشاکل خاصیت (Symmetric Property)

$\forall\, z_1, z_2 \in C,\quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_2 = z_1$

(iii) متعدیت خاصیت (Transitive Property)

$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in C,\quad z_1 = z_2, z_2 = z_3 \Rightarrow z_1 = z_3$

مشق 2.5

1۔ قیمت معلوم کریں۔

(i) i^7 (ii) i^{50} (iii) i^{12}

(iv) $(-i)^8$ (v) $(-i)^5$ (vi) i^{27}

2۔ مندرجہ ذیل اعداد کے کانجوگیٹ لکھیے۔

(i) $2 + 3i$ (ii) $3 - 5i$ (iii) $-i$

(iv) $-3 + 4i$ (v) $-4 - i$ (vi) $i - 3$

3۔ مندرجہ ذیل اعداد کے حقیقی اور امیجنری (imaginary) حصے لکھیے۔

(i) $1 + i$ (ii) $-1 + 2i$ (iii) $-3i + 2$

(iv) $-2 - 2i$ (v) $-3i$ (vi) $2 + 0i$

4۔ x اور y کی قیمت معلوم کریں، اگر $x + iy + 1 = 4 - 3i$ ہو۔

2.6 کمپلیکس اعداد پر بنیادی عوامل (Basic Operations on Complex Numbers)

(i) جمع (Addition) کا عمل

اگر $z_1 = a + ib$ اور $z_2 = c + id$ دو کمپلیکس اعداد ہوں تو z_1 اور z_2 کی حاصل جمع کو $z_1 + z_2$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ،

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

یعنی

دو کمپلیکس اعداد کا حاصل جمع ایک ایسا کمپلیکس عدد ہے جس کا حقیقی حصہ ان اعداد z_1 اور z_2 کے حقیقی حصہ کا حاصل جمع اور امیجنری (imaginary) حصہ دونوں اعداد کے امیجنری حصہ کا حاصل جمع ہو۔

مثلاً $(3 - 8i) + (5 + 2i) = (3 + 5) + (-8 + 2)i = 8 - 6i$

(ii) ضرب (Multiplication) کا عمل

اگر $z_1 = a + ib$ اور $z_2 = c + id$ دو کمپلیکس اعداد ہوں تو اُن کا حاصل ضرب z_1z_2 یوں معلوم کیا جاتا ہے:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd, \quad i^2 = -1 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

مثلاً

$$(2-3i)(4+5i) = 8 + 10i - 12i - 15i^2$$
$$= 8 - 2i + 15, \quad i^2 = -1$$
$$= 23 - 2i$$

(iii) تفریق (Subtraction) کا عمل

اگر $z_1 = a + ib$ اور $z_2 = c + id$ دو کمپلیکس نمبرز ہوں تو z_1 اور z_2 کا فرق $z_1 - z_2$ ہوگا۔
جس کا حقیقی حصہ z_1 کے حقیقی حصہ سے z_2 کے حقیقی حصہ کا حاصل تفریق ہوگا اور امیجنری حصہ z_1 کے امیجنری حصہ سے z_2 کے امیجنری حصہ کا حاصل تفریق ہوگا۔

جیسا کہ

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$$
$$= (a - c) + (b - d)i$$

مثلاً اگر $z_1 = (-2 + 3i)$ اور $z_2 = 2 + i$

تو

$$z_1 - z_2 = (-2 + 3i) - (2 + i)$$
$$= (-2 - 2) + (3 - 1)i$$
$$= -4 + 2i$$

(iv) تقسیم (Division) کا عمل

اگر $z_1 = a + ib$ اور $z_2 = c + id$ دو کمپلیکس نمبرز ہوں، تو z_1 کو z_2 پر کی تقسیم سے حاصل نمبر $\frac{z_1}{z_2}$ ہوگا۔
جبکہ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di}$$

$\frac{z_1}{z_2}$ میں z_1 اور z_2 کو z_2 کے کانجوگیٹ (conjugate) سے ضرب دینے سے ہم حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bci - adi - bdi^2}{c^2 - (di)^2}$$
$$= \frac{ac + bci - adi + bd}{c^2 + d^2}, \left(i^2 = -1\right)$$
$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right) i$$

جمعی، تفریقی، ضربی اور تقسیمی عوامل درج ذیل مثالوں سے مزید واضح کیے جاتے ہیں:

مثال 1 $(-1+\sqrt{-2})^2$ کا حقیقی اور امیجری حصہ الگ الگ کیجیے۔

حل اگر $z = -1 + \sqrt{-2}$, تو

$$z^2 = (-1+\sqrt{-2})^2 = (-1+i\sqrt{2})^2$$

$$= (-1+i\sqrt{2})\,(-1+i\sqrt{2})$$

$$= (-1)\,(-1+i\sqrt{2}) + i\sqrt{2}\,(-1+i\sqrt{2})$$

$$= 1 - i\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 2i^2 = -1 - 2\sqrt{2}\,i$$

$\Rightarrow$ حقیقی حصہ $(z^2) = -1$ اور کمپلیکس حصہ $(z^2) = -2\sqrt{2}$

مثال 2 $\dfrac{1}{1+2i}$ کو معیاری شکل $a+bi$ میں ظاہر کیجیے۔

حل

$$\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{1-2i}{(1+2i)(1-2i)}$$ ($\dfrac{1}{1+2i}$ میں شمار کنندہ اور مخرج دونوں کو $(1-2i)$ سے ضرب دینے سے)

$$= \frac{1-2i}{1-4i^2} = \frac{1-2i}{1+4}, \; i^2 = -1$$

$$= \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

مثال 3 $\dfrac{(4+5i)}{(4-5i)}$ کو معیاری شکل $a+bi$ میں حاصل کریں۔

حل

$$\frac{4+5i}{4-5i} = \frac{4+5i}{4-5i} \times \frac{4+5i}{4+5i}$$ ($4+5i$ سے ضرب اور تقسیم کرنے سے)

$$= \frac{(4+5i)\;(4+5i)}{(4-5i)\;(4+5i)}$$

$$= \frac{4(4+5i) + 5i\,(4+5i)}{16+25}$$

$$= \frac{16+20i+20i-25}{41} = \frac{16-25+40i}{41}$$

$$= \frac{-9+40i}{41} = -\frac{9}{41} + \frac{40}{41}i$$

مطلوبہ شکل ہے۔

مثال 4 $(3-4i)(x+yi) = 1+0i$ کو x اور y میں حل کیجیے۔

حل

$$(3-4i)(x+yi) = 1+0i$$

$$\Rightarrow 3x+3iy-4ix-4i^2y = 1+0i$$

$$\Rightarrow 3x+(3y-4x)i+4y = 1+0i$$

$$\Rightarrow 3x+4y+(3y-4x)i = 1+0i$$

کمپلیکس اعداد میں برابری کے تصور کی مدد سے

$$3y-4x=0 \text{ اور } 3x+4y=1$$

دونوں مساواتوں کو باہم حل کرنے سے $x = \frac{3}{25}$ اور $y = \frac{4}{25}$ مطلوبہ حل ہے۔

مشق 2.6

1۔ نیچے دیے ہوئے جملوں میں سے درست یا غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) $\sqrt{-3}\sqrt{-3}=3$ (ii) $i^{73}=-i$ (iii) $i^{10}=-1$

(iv) $(-6i+i^2)$ کا کانجوگیٹ $(-1+6i)$ ہے۔

(v) کمپلیکس عدد $z=a+bi$ اور اس کے کانجوگیٹ کا فرق ایک حقیقی عدد ہے۔

(vi) اگر $(a-1)-(b+3)i=5+8i$ ہو تو $a=6$, اور $b=-11$

(vii) ایک کمپلیکس عدد کو اس کے کانجوگیٹ سے ضرب دینے سے ہمیشہ ایک مثبت حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔

2۔ مندرجہ ذیل کمپلیکس اعداد کو $a+bi$ کی شکل میں حاصل کریں جبکہ a اور b حقیقی اعداد ہوں۔

(i) $(2+3i)+(7-2i)$ (ii) $2(5+4i)-3(7+4i)$

(iii) $-(-3+5i)-(4+9i)$ (iv) $2i^2+6i^3+3i^{16}-6i^{19}+4i^{25}$

3۔ مندرجہ ذیل کو $a+bi$ کی شکل میں مختصر کریں۔

(i) $(-7+3i)(-3+2i)$ (ii) $(2-\sqrt{-4})(3-\sqrt{-4})$

(iii) $(\sqrt{5}-3i)^2$ (iv) $(2-3i)(\overline{3-2i})$

4۔ مندرجہ ذیل کو $a + bi$ کی شکل میں مختصر کریں۔

(i) $\frac{-2}{1+i}$ (ii) $\frac{2+3i}{4-i}$ (iii) $\frac{9-7i}{3+i}$

(iv) $\frac{2-6i}{3+i} - \frac{4+i}{3+i}$ (v) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$ (vi) $\frac{1}{(2+3i)(1-i)}$

5۔ مندرجہ ذیل کے (a) $\overline{z}$ (b) $z + \overline{z}$ (c) $z - \overline{z}$ اور (d) $z\,\overline{z}$ کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $z = -i$ (ii) $z = 2 + i$ (iii) $z = \frac{1+i}{1-i}$

(iv) $z = \frac{4-3i}{2+4i}$

6۔ اگر $z = 2 + 3i$ اور $w = 5 - 4i$ تو تصدیق کریں کہ

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (ii) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$

(iii) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ (iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ، $w \neq 0$

(v) $\frac{1}{2}(z + \overline{z})$ ، z کا حقیقی حصہ ہے

(vi) $\frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ ، z کا ایمجنری حصہ ہے

7۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کو x اور y میں حل کریں۔

(i) $(2 - 3i)(x + yi) = 4 + i$

(ii) $(3 - 2i)(x + yi) = 2(x - 2yi) + 2i - 1$

(iii) $(3 + 4i)^2 - 2(x - yi) = x + yi$

اعادہ مشق 2

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) $(27x^{-1})^{-2/3} = \ldots\ldots\ldots$

(a) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{9}$ (b) $\frac{\sqrt{x^3}}{9}$ (c) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{8}$ (d) $\frac{\sqrt{x^3}}{8}$

(ii) $\sqrt[7]{x}$ کو پاور فارم میں لکھیے............

(a) x (b) x^7 (c) $x^{1/7}$ (d) $x^{7/2}$

(iii) $4^{2/3}$ کو ریڈیکل فارم میں لکھیے............

(a) $\sqrt[3]{4^2}$ (b) $\sqrt{4^3}$ (c) $\sqrt[2]{4^3}$ (d) $\sqrt{4^6}$

(iv) $\sqrt[3]{35}$ میں ریڈیکنڈ............ ہے۔

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 35 (d) کوئی نہیں

(v) $\left(\frac{25}{16}\right)^{-1/2} =$ ....

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $-\frac{5}{4}$ (d) $-\frac{4}{5}$

(vi) $5 + 4i$ کا کنجوگیٹ............ ہے۔

(a) $-5 + 4i$ (b) $-5 - 4i$ (c) $5 - 4i$ (d) $5 + 4i$

(vii) i^9 کی قیمت .... ہے۔

(a) 1 (b) -1 (c) i (d) $-i$

(viii) ہر حقیقی نمبر............ ہے۔

(a) ایک مثبت صحیح عدد (b) ایک ناطق نمبر

(c) ایک منفی صحیح عدد (d) ایک کمپلیکس نمبر

(ix) کمپلیکس نمبر $2ab(i + i^2)$ کا حقیقی حصہ .... ہے۔

(a) $2ab$ (b) $-2ab$ (c) $2abi$ (d) $-2abi$

(x) کمپلیکس نمبر $-i(3i + 2)$ کا امیجنری حصہ .... ہے۔

(a) -2 (b) 2 (c) 3 (d) -3

(xi) کونسا سیٹ........ بلحاظ جمع خاصیت بندش کا حامل ہے؟

(a) $\{0\}$ (b) $\{0, -1\}$

(c) $\{0, 1\}$ (d) $\left\{1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$

(xii) کون سی خصوصیت .... کے استعمال سے $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \times 1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ہے۔

(a) جمعی ذاتی عنصر (b) جمعی معکوس (c) ضربی ذاتی عنصر (d) ضربی معکوس

(xiii) اگر $z < 0$ تو ...... $x < y \Rightarrow$

(a) $xz < yz$ (b) $xz > yz$

(c) $xz = yz$ (d) کوئی نہیں

(xiv) اگر $a, b \in R$ اور صرف ایک $a = b$ یا $a < b$ یا $a > b$ درست ہے۔ یہ کون سی خاصیت کہلاتی ہے؟

(a) ثلاثی (b) متعدیت (c) جمعی (d) ضربی

(xv) ایک غیر اختتامی غیر تکراری اعشاری عدد .... عدد ہے۔

(a) قدرتی عدد (b) ناطق عدد (c) غیر ناطق عدد (d) پرائم (مفرد) عدد

2۔ مندرجہ ذیل میں سے درست یا غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) تقسیم کا عمل حقیقی اعداد کے سیٹ R پر خاصیت تلازم نہیں رکھتا۔ ....

(ii) سیٹ W کا ہر عدد قدرتی عدد ہے۔ ....

(iii) نمبر 0.02 کا ضربی معکوس 50 ہے۔ ....

(iv) π ایک ناطق عدد ہے۔ ....

(v) ہر صحیح عدد ایک ناطق عدد ہے۔ ....

(vi) تفریق کا عمل خاصیت مبادلہ کا حامل ہے۔ ....

(vii) ہر حقیقی عدد ایک ناطق عدد ہے۔ ....

(viii) اعشاری ناطق عدد یا اختتامی عدد ہے یا تکراری۔ ....

(ix) $1.\overline{8} = 1 + \frac{8}{9}$ ....

3۔ درج ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\sqrt[4]{81y^{-12}\ x^{-8}}$ (ii) $\sqrt{25\ x^{10n}\ y^{8m}}$

(iii) $\left(\frac{x^3\ \ y^4\ \ z^5}{x^{-2}\ \ y^{-1}\ \ z^{-5}}\right)^{\frac{1}{5}}$ (iv) $\left(\frac{32\ x^{-6}\ y^{-4}\ z}{625\ x^4\ y\ z^{-4}}\right)^{2/5}$

z

4۔ $\sqrt{\frac{(216)^{2/3} \times (25)^{1/2}}{(0.04)^{-3/2}}}$ کو مختصر کیجیے۔

5- $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+q} \cdot \left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q+r} \div 5(a^p \cdot a^r)^{p-r}, a \neq 0$ کومختصر کریں۔

6- $\left(\frac{a^{2l}}{a^{l+m}}\right)\left(\frac{a^{2m}}{a^{m+n}}\right)\left(\frac{a^{2n}}{a^{n+l}}\right)$ کومختصر کریں۔

7- $\sqrt[3]{\frac{a^l}{a^m}} \times \sqrt[3]{\frac{a^m}{a^n}} \times \sqrt[3]{\frac{a^n}{a^l}}$ کومختصر کریں۔

خلاصہ

☆ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ $R = Q \cup Q'$ ہے۔ جب کہ

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

اور

$$Q' = \left\{ x \mid x \neq \frac{p}{q} \wedge p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

☆ تمام حقیقی اعداد کے سیٹ R کی تمام جمعی اور ضربی خصوصیات:

(i) خاصیت بندش:

$a + b \in R, ab \in R, \forall a, b \in R$

(ii) خاصیت تلازم:

$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc), \forall a, b, c \in R$

(iii) خاصیت مبادلہ:

$a + b = b + a, \ ab = ba, \quad \forall a, b \in R$

(iv) خاصیت ذاتی عنصر:

$a + 0 = a = 0 + a, \forall a \in R$ (جمعی)

$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a, \forall a \in R$ (ضربی)

(v) خاصیت معکوس:

$a + (-a) = 0 = (-a) + a, \forall a \in R$ (جمعی)

$a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a, \ a \neq 0$ (ضربی)

(vi) خاصیت تقسیمی:

$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in R$

$(b + c) a = ba + ca$ (جمعی)

$a(b - c) = ab - ac,$

$(a - b)c = ac - bc$ (تفریقی)

☆ برابری کی خصوصیات

(i) عکسی خاصیت $a = a, \forall a \in \mathrm{R}$

(ii) تشاکل خاصیت $a = b \Rightarrow b = a, \forall a, b \in \mathrm{R}$

(iii) متعدیت خاصیت $a = b, b = c \Rightarrow a = c \quad \forall a, b, c \in \mathrm{R}$

(iv) جمعی خاصیت $a = b \Rightarrow a + c = b + c$

(v) ضربی خاصیت $a = b \Rightarrow ac = bc$

(vi) تنسیخی خاصیت $ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b$

☆ ریڈیکل $\sqrt[n]{x}$ میں $\sqrt{\ }$ ریڈیکل کا نشان ہے، x ریڈیکنڈ ہے یا بیس اور n ریڈیکل کا انڈیکس ہے۔

☆ انڈیکس پاورز اور اس کے قوانین:

$$(a^m)^n = a^{mn}, \ (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \ a \neq 0$$

$$a^0 = 1, \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$$

☆ کمپلیکس عدد $z = a + bi$ کو امیجنری (imaginary) نمبر $i = \sqrt{-1}$ سے متعارف کرایا گیا جبکہ

$a, b \in \mathrm{R}$ اور $(z) = a$ حقیقی حصہ اور $(z) = b$ امیجنری حصہ

☆ کمپلیکس عدد $z = a + bi$ کا کانجوگیٹ $\overline{z} = a - bi$ مانا جاتا ہے۔

یونٹ 3

لوگارتھم

(LOGARITHMS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

3.1	سائنسی ترقیم (Scientific Notation)
3.2	لوگارتھم (Logarithm)
3.3	عام اور قدرتی لوگارتھم (Common and Natural Logarithm)
3.4	لوگارتھم کے قوانین (Laws of Logarithm)
3.5	لوگارتھم کا استعمال (Application of Logarithm)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر علمی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ عام ترقیم (standard form) میں دیے گئے عدد کو سائنسی ترقیم (scientific notation) میں اور اس کے برعکس لکھ سکیں۔

☆ تعریف کر سکیں کہ اساس 'a' پر کسی عدد y کے لوگارتھم سے مراد 'a' کا وہ قوت نما x ہے جس سے $a^x = y$ حاصل ہو جائے۔

(یعنی $y > 0$ اور $a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x, a > 0, a \neq 1$)

☆ عام لوگارتھم، کسی عدد کے لوگارتھم کے خاصہ (Characteristic) اور مینٹیسا (Mantissa) کی تعریف کر سکیں۔

☆ کسی عدد کا log معلوم کرنے کے لیے لوگارتھم کی جدول (log tables) کے استعمال کا طریقہ سیکھ سکیں۔

☆ ضد لوگارتھم (antilog) کے تصور کو سیکھ کر متعلقہ جدول (antilog tables) کی مدد سے کسی عدد کا ضد لوگارتھم معلوم کر سکیں۔

☆ عام اور قدرتی لوگارتھم کے درمیان فرق کر سکیں۔

☆ لوگارتھم کے مندرجہ ذیل قوانین ثابت کر سکیں۔

(i)	$\log_a(mn)$	$= \log_a m + \log_a n$
(ii)	$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)$	$= \log_a m - \log_a n$
(iii)	$\log_a m^n$	$= n \log_a m$
(iv)	$\log_a m \log_m n$	$= \log_a n$

☆ لوگارتھم کے قوانین کو استعمال کر کے ضرب، تقسیم، اعداد کی کوئی قوت نمائی یا جذر لینے جیسے لمبے (پیچیدہ) ریاضیاتی عوامل کے استعمال کو جمع اور تفریق جیسے آسان تر عوامل میں تبدیل کر سکیں۔

تعارف

لوگارتھم کے استعمال سے مشکل اور پیچیدہ حساب کتاب کے مسائل آسان تر ہو جاتے ہیں۔ اس کی ایجاد کا سہرا مسلمان ریاضی دان ابو محمد موسیٰ الخوارزمی کے سر ہے۔ بعد میں جان نیپئر (John Napier) نے اس میں مزید اصلاح کی اور لوگارتھم کی جدولیں (log tables) تیار کیں۔ اس جدول کے لیے اس نے اساس (base) 'e' استعمال کی۔ پروفیسر ہنری برگز (Henry Briggs) کو جان نیپئر کے کام میں خاصی دلچسپی تھی۔ برگز نے اساس 10 والی لوگارتھم جدولیں تیار کیں۔ 1620ء میں جابسٹ برگی (Jobst Burgi) نے ضد لوگارتھم (antilogarithms) کی جدول تیار کی۔

3.1 سائنسی ترقیم (Scientific Notation)

سائنس اور فنی کام میں ہمیں ایسے اعداد کا استعمال بھی کرنا پڑتا ہے جو یا تو بہت چھوٹے یا بہت بڑے ہوتے ہیں۔ مثال کے طور پر زمین سے سورج تک فاصلہ قریباً 150,000,000 کلومیٹر اور ہائڈروجن ایٹم کا وزن 0.000,000,000,000,000,000,000,001,7 گرام ہے۔ جب ان اعداد کو عام ترقیم میں لکھتے ہیں تو اس بات کا قوی امکان ہوتا ہے کہ کوئی ایک صفر چھوڑ دیا جائے یا صفروں کی اصل تعداد سے زیادہ لکھ دیے جانے کی غلطی ہو جائے۔ اس مسئلے پر قابو پانے کے لیے سائنسدانوں نے بہت چھوٹے یا بہت بڑے عام اعداد کو ظاہر کرنے کے لیے ایک جامع، بالکل ٹھیک اور موزوں طریقہ رائج (develop) کیا جسے "سائنسی ترقیم" کہتے ہیں۔

کسی دیے گئے عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھنے کے لیے اسے $a \times 10^n$ کے طور پر لکھا جاتا ہے۔

جبکہ $1 \le a < 10$ اور n ایک صحیح عدد ہو۔

مذکورہ بالا اعداد کو سائنسی ترقیم میں آسانی کے ساتھ بالترتیب 1.5×10^8 کلومیٹر اور 1.7×10^{-24} گرام لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 1 عام ترقیم میں لکھے گئے درج ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیں۔

(i) 30600 (ii) 0.000058

حل

(i) $30600 = 3.06 \times 10^4$ (نقطہ اعشاریہ کو چار درجے بائیں طرف حرکت دیں)

(ii) $0.000058 = 5.8 \times 10^{-5}$ (نقطہ اعشاریہ کو پانچ درجے دائیں طرف حرکت دیں)

مشاہدہ کریں کہ کسی عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھنے کے لیے

(i) دیے گئے عدد کے بائیں جانب سے پہلے غیر صفر ہندسے کے بعد نقطہ اعشاریہ لگائیں۔

(ii) پہلے مرحلے یعنی (i) میں حاصل کردہ عدد کو 10^n سے ضرب دیتے ہیں اگر ہم نے نقطہ اعشاریہ کی جگہ کو n درجے بائیں جانب حرکت دی ہو۔

(iii) پہلے مرحلے یعنی (i) میں حاصل کردہ عدد کو 10^{-n} سے ضرب دیتے ہیں اگر ہم نے نقطہ اعشاریہ کی جگہ کو n درجے دائیں جانب حرکت دی ہو۔

دوسری طرف اگر ہم کسی عدد کو سائنسی ترقیم سے عام ترقیم میں تبدیل کرنا چاہتے ہوں تو اوپر لکھے ہوئے طریق کار کو صرف برعکس عمل کر دیتے ہیں۔

مثال 2 سائنسی ترقیم میں لکھے گئے درج ذیل اعداد کو عام ترقیم میں تبدیل کریں۔

(i) 6.35×10^6 (ii) 7.61×10^{-4}

حل

(i) $6.35 \times 10^6 = 6350000$ (نقطہ اعشاریہ کو چھ درجے دائیں طرف حرکت دیں)

(ii) $7.61 \times 10^{-4} = 0.000761$ (نقطہ اعشاریہ کو چار درجے بائیں طرف حرکت دیں)

مشق 3.1

-1 مندرجہ ذیل اعداد کو سائنسی ترقیم میں لکھیے۔

(i) 5700 (ii) 49,800,000 (iii) 96,000,000

(iv) 416.9 (v) 83,000 (vi) 0.00643

(vii) 0.0074 (viii) 60,000,000 (ix) 0.0000000395

(x) $\dfrac{275,000}{0.0025}$

-2 مندرجہ ذیل اعداد کو عام ترقیم میں لکھیے۔

(i) 6×10^{-4} (ii) 5.06×10^{10}

(iii) 9.018×10^{-6} (iv) 7.865×10^{8}

3.2 لوگارتھم (Logarithm)

اعداد و شمار کے مسائل کو صحیح اور تیزی سے حل کرنے کے لیے لوگارتھم کا عمل بہت مفید اور مؤثر طریقہ ہے۔ اساس '10' کے لوگارتھم کو عام لوگارتھم اور اساس 'e' کے لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم کہتے ہیں۔ اب ہم اساس 'a' کے لوگارتھم کی تعریف کریں گے جبکہ 'a' ایک حقیقی عدد ہو اور $a > 0$ ، $a \neq 1$

3.2.1 حقیقی عدد کا لوگارتھم

اگر $a^x = y$ جبکہ $a, x, y \in \mathrm{R}$ اور $a > 0, y > 0$ اور $a \neq 1$ تو x کو اساس 'a' پر y کا لوگارتھم کہتے ہیں اور اسے $\log_a y = x$ لکھتے ہیں۔

$a^x = y$ اور $\log_a y = x$ دو مترادف مساواتیں ہیں۔ اگر کوئی ایک مساوات دی گئی ہو تو اسے دوسری میں بدلا جا سکتا ہے۔ یعنی

$$a^x = y \iff \log_a y = x$$

$a^x = y$ کو قوت نمائی شکل اور $\log_a y = x$ کو لوگارتھمی شکل کہتے ہیں۔

اس اضافی نقطہ کی وضاحت کے لیے مشاہدہ کریں کہ

> کسی منفی عدد کا لوگارتھم اس مرحلے پر زیرِ بحث نہیں ہے۔

$3^2 = 9$ مترادف ہے $\log_3 9 = 2$ کے (یعنی $3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$)

اور $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ مترادف ہے $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ کے (یعنی $2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$)

اسی طرح $\log_3 27 = 3$ مترادف ہے $27 = 3^3$ کے (یعنی $\log_3 27 = 3 \Rightarrow 27 = 3^3$)

مثال 3 $\log_4 2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل اگر $\log_4 2 = x$

تو قوت نمائی شکل میں لکھنے سے $4^x = 2$

$$\Rightarrow \quad 2^{2x} = 2^1$$
$$\Rightarrow \quad 2x = 1$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

x کی قیمت درج کرنے سے $\Rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

لوگارتھم کی تعریف سے اخذ کردہ نتائج

(i)	$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$	
(ii)	$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$	

3.2.2 عام لوگارتھم، خاصہ اور مینٹیسا (Common Logarithm, Characteristic and Mantissa)

عام لوگارتھم کی تعریف

روزمرہ زندگی میں اعداد و شمار کے لیے لوگارتھم کی اساس 10 لی جاتی ہے۔ ایسے لوگارتھم کو عام لوگارتھم یا برگز لوگارتھم کہتے ہیں۔ ہنری برگز (Henry Briggs) ایک انگریز ریاضی دان اور ماہر فلکیات تھا جس نے اساس 10 کی لوگارتھم جدولیں تیار کیں۔ اس کے اعزاز میں ہی عام لوگارتھم کو برگز لوگارتھم کہتے ہیں۔

کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ اور مینٹیسا

مندرجہ ذیل پر غور کیجیے

$10^3 = 1000$	$\Leftrightarrow$	$\log 1000$	$= 3$
$10^2 = 100$	$\Leftrightarrow$	$\log 100$	$= 2$
$10^1 = 10$	$\Leftrightarrow$	$\log 10$	$= 1$
$10^0 = 1$	$\Leftrightarrow$	$\log 1$	$= 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\Leftrightarrow$	$\log 0.1$	$= -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\Leftrightarrow$	$\log 0.01$	$= -2$
$10^{-3} = 0.001$	$\Leftrightarrow$	$\log 0.001$	$= -3$

نوٹ: اگر صرف عام لوگارتھم کا استعمال ہی زیر بحث ہو تو اساس 10 نہیں لکھی جاتی۔ یعنی log کے ساتھ اساس نہ لکھی ہو تو اساس 10 تصور کی جائے گی۔

اب درج ذیل جدول پر بھی غور کیجیے۔

برائے اعداد	لوگارتھم
1 اور 10 کے درمیان	کسر اعشاریہ
10 اور 100 کے درمیان	کسر اعشاریہ +1
100 اور 1000 کے درمیان	کسر اعشاریہ +2
0.1 اور 1 کے درمیان	کسر اعشاریہ +1–
0.01 اور 0.1 کے درمیان	کسر اعشاریہ +2–
0.001 اور 0.01 کے درمیان	کسر اعشاریہ +3–

مشاہدہ کریں کہ

کسی عدد کا لوگارتھم (جو 10 کی صحیح عددی قوت نہ ہو) دو حصوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

(i) ایک صحیح عددی حصہ جو '1' سے بڑے عدد کے لیے مثبت اور '1' سے چھوٹے عدد کے لیے منفی ہوتا ہے۔
کسی عدد کے لوگارتھم کے صحیح عددی حصے کو لوگارتھم کا خاصہ (characteristic) کہتے ہیں۔

(ii) ایک کسری حصہ جو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔ اس کسری حصے کو مینٹیسا (mantissa) کہتے ہیں۔

(i) '1' سے بڑے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ

مندرجہ بالا جدول کے پہلے حصے سے ظاہر ہوتا ہے کہ
اگر کسی عدد کا صحیح عددی حصہ ایک ہندسہ پر مشتمل ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ 0 ہوتا ہے۔
اگر کسی عدد کا صحیح عددی حصہ دو ہندسوں پر مشتمل ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ 1 ہوتا ہے۔
اگر کسی عدد کا صحیح عددی حصہ تین ہندسوں پر مشتمل ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ 2 ہوتا ہے وغیرہ وغیرہ
دوسرے الفاظ میں '1' سے بڑے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ صحیح عددی حصہ کے ہندسوں کی تعداد سے ایک کم ہوتا ہے۔

عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھ کر بھی خاصہ معلوم کر سکتے ہیں۔
اگر کسی عدد 'b' کو سائنسی ترقیم میں لکھا جائے۔ یعنی

$$b = a \times 10^n , 1 \le a < 10$$

تو $\log b$ کا خاصہ 10 کے قوت نما n کے برابر ہوتا ہے۔

مثال سائنسی ترقیم میں لکھ کر اور 10 کی قوت نمائی شکل کو نوٹ کرتے ہوئے درج ذیل اعداد کے لوگارتھم کا خاصہ معلوم کریں:

1.02، 99.6، 102 اور 1662.4

حل

عدد	سائنسی ترقیم	لوگارتھم کا خاصہ
1.02	1.02×10^0	0
99.6	9.96×10^1	1
102	1.02×10^2	2
1662.4	1.6624×10^3	3

'1' سے چھوٹے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ

زیر بحث جدول کا دوسرا حصہ ظاہر کرتا ہے کہ

اگر کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد کوئی '0' موجود نہ ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '1-' ہوتا ہے۔

اگر کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد ایک '0' موجود ہو تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '2-' ہوتا ہے۔

اگر کسی عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد دو '0' موجود ہوں تو عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '3-' ہوتا ہے۔

وغیرہ وغیرہ۔

دوسرے الفاظ میں '1' سے کم عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور عدد کے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد موجود صفروں کی تعداد سے '1' زیادہ۔

مثال (سائنسی ترقیم کا استعمال)

سائنسی ترقیم میں لکھ کر اور 10 کی قوت نما نوٹ کرتے ہوئے مندرجہ ذیل اعداد کے لوگارتھم کا خاصہ معلوم کریں:

0.872، 0.02 اور 0.00345

حل

عدد	سائنسی ترقیم	لوگارتھم کا خاصہ
0.872	8.72×10^{-1}	-1
0.02	2.0×10^{-2}	-2
0.00345	3.45×10^{-3}	-3

جب کوئی عدد '1' سے چھوٹا ہو تو عام طور پر اس عدد کے لوگارتھم کے خاصہ مثلاً 3- کو $\bar{3}$ ، 2- کو $\bar{2}$ اور 1- کو $\bar{1}$ لکھا جاتا ہے ($\bar{3}$ کو بار 3 پڑھتے ہیں) تاکہ مینٹیسا کو منفی نہ سمجھ لیا جائے۔

نوٹ $\bar{2}.3748$ کا مطلب -2.3748 نہیں ہوتا۔ بلکہ $\bar{2}.3748$ میں 2 منفی ہے اور 0.3748 مثبت، جبکہ -2.3748 میں 2 اور 0.3748 دونوں ہی منفی ہیں۔

(ii) کسی عدد کے لوگارتھم کا مینٹیسا معلوم کرنے کا طریقہ

کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ مندرجہ بالا راہنمائی نقاط کی مدد سے محض بغور جائزہ لینے سے لکھا جاتا ہے۔ جبکہ مینٹیسا لوگارتھمی جدول کے استعمال سے معلوم کیا جاتا ہے۔ یہ جدول سات درجے کسر اعشاریہ تک لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے تیار کیے گئے ہیں۔ لیکن تمام عملی مقاصد کے لیے چار ہندسی لوگارتھمی جدول کافی حد تک صحیح جواب مہیا کر دیں گی۔

لوگارتھمی جدول تین حصوں پر مشتمل ہوتی ہیں:

(a) جدول کا پہلا حصہ انتہائی بائیں جانب والا کالم (column) ہے جس کا بالائی سرا ایک خالی مربع ہے۔ اس کالم میں 10 سے 99 تک دو ہندسوں والے اعداد درج ہیں۔ جس عدد کا لوگارتھم مطلوب ہو اس کے بائیں جانب والے پہلے دو ہندسے اس کالم میں سے تلاش کیے جاتے ہیں۔

(b) جدول کا دوسرا حصہ 10 کالموں پر مشتمل ہے جن کے بالائی سرے خالی مربع کی افقی سیدھ میں بنے ہوئے خانے ہیں۔ جن میں اعداد 0، 1، 2، . . . ، 9 درج ہیں۔ زیر بحث عدد کا بائیں جانب سے تیسرا ہندسہ ان (0 سے 9) میں سے دیکھا جاتا ہے۔ اس تیسرے ہندسے والے کالم اور (a) والے دو ہندسوں کے عین سامنے والی قطار میں (دونوں کے تقاطع پر) درج شدہ عدد نوٹ کر لیتے ہیں۔ (مینٹیسا معلوم کرتے وقت دیے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ آسانی کے لیے وقتی طور پر نظر انداز کر دیتے ہیں)

(c) جدول کا تیسرا حصہ 1 سے 9 تک مزید کالموں پر مشتمل ہوتا ہے جن کو فرق والے کالم (mean differences columns) کہتے ہیں۔ ان میں سے زیر بحث عدد کے چوتھے ہندسے کے مطابق کالم اور (a) میں بیان کردہ قطار کے تقاطع پر جو نمبر درج ہو اسے (b) میں نوٹ کیے ہوئے عدد میں جمع کر لیتے ہیں۔ اس مجموعہ کے ساتھ پہلے نظر انداز کیا ہوا نقطہ اعشاریہ لگا کر مطلوبہ مینٹیسا (کسر اعشاریہ) حاصل ہو گا۔

کسی عدد کے log کا مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے جب چار ہندسی لوگارتھمی جدول کو استعمال کرنا ہو تو دیے گئے عدد میں نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کرتے ہوئے اسے چار اہم ہندسوں (significant figures) تک قریباً صحیح (راؤنڈ آف) کر لیا جاتا ہے۔

3.2.3 کسی عدد کا لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے جدول کا استعمال

دیے گئے عدد کا لوگارتھم معلوم کرنے کے طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جائے گی۔ پہلی دو مثالوں میں ہم صرف مینٹیسا معلوم کرنے تک محدود رہیں گے۔

مثال 1 log 43.254 کا مینٹیسا معلوم کیجیے۔

حل نقطہ اعشاریہ کو وقتی طور پر نظر انداز کر کے 43.254 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 4325 بنایا۔

(i) سب سے پہلے لوگارتھمی جدول کے انتہائی بائیں جانب کے پہلے کالم میں دو ہندسوں والے اعداد میں 43 کے سامنے کی قطار تلاش کریں گے۔

(ii) اس قطار اور کالم 2 کے نیچے (قطار اور کالم کے تقاطع) پر دیے گئے نمبر 6355 کو نوٹ کریں گے۔

(iii) اسی قطار میں فرق والے کالم 5 کے نیچے دونوں کے تقاطع پر عدد 5 درج ہے۔

(iv) ان دونوں اعداد کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 6360 (0005 + 6355) مطلوبہ مینٹیسا کی نشاندہی کرتا ہے جو 0.6360 ہو گا۔

یعنی log 43.25 کا مینٹیسا = 0.6360 ہو گا۔

مثال 2 log 0.002347 کا مینٹیسا معلوم کیجیے۔

حل یہاں بھی ہم چار اہم ہندسوں کو لیں گے یعنی 2347

پہلے کی طرح لوگارتھمی جدول میں 23 کے سامنے والی قطار اور 4 کے نیچے کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا عدد 3692 نوٹ کیا۔

اسی قطار یعنی 23 کے سامنے والی قطار اور فرق والے کالم 7 کے تقاطع پر 13 درج ہے۔

3692 اور 13 کو جمع کر کے حاصل کردہ نمبر 3705 ہے۔

لہٰذا log(0.002347) کا مینٹیسا 0.3705 ہو گا۔

نوٹ: ایسے اعداد جن کے اہم ہندسوں کی ترتیب یکساں ہو ان کے log کا مینٹیسا بھی یکساں ہوتا ہے۔ مثلاً log 0.02347 اور log 0.2347 دونوں کا مینٹیسا 0.3705 ہی ہے۔

کسی دیے گئے عدد کا لوگارتھم معلوم کرنے کے لیے:

(i) عدد کو راؤنڈ آف (round off) کر کے چار اہم ہندسوں تک محدود کر دیں۔

(ii) بغور جائزہ لے کر عدد کے log کا خاصہ معلوم کریں۔

(iii) لوگارتھمی جدول کی مدد سے عدد کے log کا مینٹیسا معلوم کریں۔

(iv) خاصہ اور مینٹیسا دونوں کو ملا کر عدد کے log کی قیمت حاصل ہو گی۔

مثال 3 (i) log 278.23 اور (ii) log 0.07058 کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل (i) 278.23 کو راؤنڈ آف کرنے سے چار اہم ہندسوں والا عدد 278.2 ہے۔

278.2 کا صحیح عددی حصہ 3 ہندسوں پر مشتمل ہے۔ پس

خاصہ = 2, ... (3 – 1 = 2)

اب مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے لوگارتھمی جدول کے انتہائی بائیں جانب والے پہلے کالم میں 27 کے سامنے والی قطار میں اور کالم 8 کے عین نیچے (قطار اور کالم کے تقاطع پر) لکھا عدد 4440 نوٹ کیا۔

اسی قطار میں فرق والے کالم 2 کے نیچے لکھا ہوا نمبر 3 ہے۔ 4440 اور 3 کو جمع کرنے سے عدد 4443 حاصل ہوا۔ اس لیے

مینٹیسا = 0.4443

لہٰذا log 278.23 = 2.4443

(ii) دیے گئے عدد 0.07058 میں چونکہ اعشاریہ کے فوراً بعد ایک '0' موجود ہے اس لیے log (0.07058) کا خاصہ 2- ہے جسے عام طور پر $\bar{2}$ لکھا جاتا ہے۔

اب مینٹیسا معلوم کرنے کے لیے نقطہ اعشاریہ کو نظر انداز کرتے ہوئے چار ہندسی عدد 7058 بنتا ہے۔
لوگارتھمی جدول کی مدد سے

مینٹیسا = 0.8487

لہٰذا log (0.07058) = $\bar{2}$.8487

3.2.4 ضد لوگارتھم (Antilogarithm) کا تصور اور متعلقہ جدول کا استعمال

وہ عدد جس کا لوگارتھم معلوم ہو ضد لوگارتھم کہلاتا ہے۔ یعنی اگر $\log y = x$ ہو تو y کو x کا ضد لوگارتھم کہتے ہیں اور اسے $y = \text{antilog}\, x$ لکھتے ہیں۔

ضد لوگارتھم معلوم کرنے کا طریقہ

خاصہ کو وقتی طور پر نظر انداز کر کے مینٹیسا پر غور کرتے ہوئے ضد لوگارتھم کے جدول کو استعمال کرتے ہیں۔ آخر میں جدول سے حاصل کردہ عدد میں خاصہ کی مدد سے نقطہ اعشاریہ کی نشان دہی کی جاتی ہے۔

ضد لوگارتھم جدول میں انتہائی بائیں جانب کے پہلے کالم (خالی مربع والا) میں مینٹیسا کے پہلے دو ہندسے (بمعہ نقطہ اعشاریہ) تلاش کرتے ہیں۔ ان کے عین سامنے کی قطار اور تیسرے ہندسے کے مطابق کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا عدد نوٹ

کر لیتے ہیں۔ اسی قطار اور چوتھے ہندسے کے مطابق فرق والے کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا نمبر بھی نوٹ کر لیتے ہیں۔ نوٹ کیے ہوئے ان دونوں نمبرز کو جمع کرنے سے اہم ہندسوں پر مشتمل مطلوبہ عدد حاصل ہوتا ہے۔

اب خاصہ کی مدد سے صرف نقطہ اعشاریہ کی نشان دہی باقی رہ جاتی ہے۔

(i) دیے گئے log کا خاصہ اگر مثبت عدد ہے تو اس میں '1' جمع کرنے سے وہ نمبر حاصل ہوگا جو مطلوبہ عدد میں نقطہ اعشاریہ سے بائیں جانب والے ہندسوں کی تعداد کا تعین کرے گا۔

(ii) اگر خاصہ منفی ہو تو اس کی عددی قدر کو '1' کم کرنے سے صفروں کی وہ تعداد معلوم ہو جائے گی جو مطلوبہ عدد میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد دائیں جانب لکھے جائیں گے۔

مثال وہ اعداد معلوم کیجیے جن کے لوگارتھم کی قیمت درج ذیل ہے۔

(i) 1.3247

(ii) $\bar{2}.1324$

حل (i) فرض کریں $\log x = 1.3247$

اب $x = \text{antilog } 1.3247$ کی قیمت معلوم کرنا ہے۔

یہاں $\log x = 1$ کا خاصہ

اور $\log x = 0.3247$ کا مینٹیسا

ضد لوگارتھم جدول کے انتہائی بائیں جانب پہلے کالم میں 0.32 کے عین سامنے والی قطار اور 4 کے نیچے والے کالم کے تقاطع پر لکھا ہوا نمبر 2109 نوٹ کر لیں۔ اسی قطار اور فرق والے کالم 7 کے نیچے دونوں کے تقاطع پر نمبر '3' لکھا ہے۔ 2109 اور 3 کو جمع کرنے سے حاصل کردہ نمبر 2112 ہے۔

خاصہ میں '1' جمع کرنے سے 2=1+1 حاصل ہوا (خاصہ '1' ہو تو صحیح عددی حصہ 2 ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے)۔

اس لیے 2112 میں نقطہ اعشاریہ بائیں جانب سے دو ہندسوں کے بعد لگایا جائے گا۔ لہٰذا

$$x = \text{antilog } (1.3247)$$
$$= 21.12$$

(ii) $\bar{2}.1324$ میں

خاصہ = $\bar{2}$

اور مینٹیسا = 0.1324

(i) میں کیے گئے عمل کو دہراتے ہوئے (ضد لوگارتھم جدول کے استعمال سے) مینٹیسا 0.1324 کے مطابق چار اہم ہندسوں والا حاصل کردہ نمبر 1356 ہے۔

خاصہ $\overline{2}$ کی عددی قدر 2 کو '1' کم کرنے سے '1' = 1-2 حاصل ہوئی۔ لہٰذا نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد ایک '0' ہوگا۔

پس $$\text{antilog}(\overline{2}.1324) = 0.01356$$

مشق 3.2

1 مندرجہ ذیل اعداد کا عام لوگارتھم معلوم کیجیے۔

(i) 232.92 (ii) 29.326

(iii) 0.00032 (iv) 0.3206

2 جدول کو استعمال کیے بغیر مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔ اگر $\log 31.09 = 1.4926$ ہو

(i) $\log 3.109$ (ii) $\log 310.9$ (iii) $\log 0.003109$ (iv) $\log 0.3109$

3 وہ اعداد معلوم کیجیے جن کے عام لوگارتھم کی قیمت درج ذیل ہے۔

(i) 3.5622 (ii) $\overline{2}.7427$

4 نامعلوم کی کس قیمت کے لیے مندرجہ ذیل بیانات درست ہوں گے۔

(i) $\log_3 81 = L$ (ii) $\log_a 6 = 0.5$

(iii) $\log_5 n = 2$ (iv) $10^p = 40$

5 قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log_2 \frac{1}{128}$ (ii) $\log 512$ to the base $2\sqrt{2}$

6 مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log_2 x = 5$ (ii) $\log_{81} 9 = x$ (iii) $\log_{64} 8 = \frac{x}{2}$

(iv) $\log_x 64 = 2$ (v) $\log_3 x = 4$

3.3 عام لوگارتھم اور قدرتی لوگارتھم (Common Logarithm and Natural Logarithm)

3.2.2 میں ہم نے اساس 10 والے عام لوگارتھم کو متعارف کروایا ہے۔ عام لوگارتھم اساس 10 کی وجہ سے ڈیکیڈک (decadic) لوگارتھم بھی کہلاتے ہیں۔ ہم عام طور پر $\log_{10} x$ کو $\log x$ لکھتے ہیں اور اس قسم کے لوگارتھم عددی وضاحت کے لیے زیادہ موزوں ہوتے ہیں۔ جان نیپئر (John Napier) نے اساس e والی لوگارتھمی

جدولیں تیار کیں۔ نیپیئر لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم بھی کہتے ہیں۔ اس نے سب سے پہلے 1614 میں لوگارتھم جدول شائع کیں۔ روائتی طور پر $\log_e x$ کو ہم $\ln x$ لکھتے ہیں۔

سائنس اور انجینئرنگ کی نظریاتی تحقیقات میں اکثر اوقات اساس e کا استعمال موزوں ہوتا ہے۔ e ایک غیر ناطق عدد ہے جس کی قیمت ...2.7182818 یعنی قریباً 2.718 ہے۔

3.4 لوگارتھم کے قوانین (Laws of Logarithm)

یونٹ کے اس حصہ میں ہم لوگارتھم کے قوانین ثابت کریں گے اور پھر انہیں اعداد کی ضرب، تقسیم، قوت نما اور جذر لینے جیسے عوامل کی وضاحت کے لیے استعمال کریں گے۔

(i)	$\log_a(mn)$	$= \log_a m + \log_a n$
(ii)	$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)$	$= \log_a m - \log_a n$
(iii)	$\log_a m^n$	$= n \log_a m$
(iv)	$\log_a n$	$= \log_b n \times \log_a b$

قانون (i) $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

ثبوت

فرض کیجیے $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$

قوت نمائی شکل میں لکھنے سے $a^x = m$ اور $a^y = n$

طرفین کو ضرب دینے سے $\therefore \quad a^x \times a^y = mn$

قوت نماؤں کے حاصل ضرب کا قانون یا $a^{x+y} = mn$

لوگارتھم کی تعریف کی رو سے یا $\log_a(mn) = x + y$

x اور y کی قیمتیں درج کرنے سے یا $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

نوٹ

(i) $\log_a(mn) \neq \log_a m \times \log_a n$

(ii) $\log_a m + \log_a n \neq \log_a(m + n)$

(iii) $\log_a(mnp \ldots) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \ldots$

لوگارتھم کے مندرجہ بالا قوانین کا استعمال دو یا دو سے زیادہ اعداد کا حاصل ضرب معلوم کرنے کے لیے مفید ہے۔ ہم اس کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 1

لوگارتھم کی مدد سے 291.3×42.36 کی قیمت معلوم کریں۔

حل

فرض کریں کہ $x = 291.3 \times 42.36$

دونوں طرف لوگارتھم لینے سے $\log x = \log (291.3 \times 42.36)$

$= \log 291.3 + \log 42.36 , \quad (\log_a mn = \log_a m + \log_a n)$

$= 2.4643 + 1.6269 = 4.0912$

$\Rightarrow \quad x = \text{antilog } 4.0912 = 12340$

یادرکھیے
$\log_a a = 1$

مثال 2

لوگارتھم کی مدد سے 0.2913×0.004236 کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ $y = 0.2913 \times 0.004236$

طرفین کا log لینے سے $\log y = \log 0.2913 + \log 0.004236$

$= \bar{1}.4643 + \bar{3}.6269$

$= \bar{3}.0912$

$\Rightarrow y = \text{antilog } \bar{3}.0912 = 0.001234$

قانون (ii) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

ثبوت

فرض کریں کہ $\log_a m = x$ اور $\log_a n = y$

$\Rightarrow \quad a^x = m$ اور $a^y = n$

$\therefore \quad \frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n} \Rightarrow a^{x-y} = \frac{m}{n}$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = x - y$$

$$\therefore \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

نوٹ

(i) $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) \neq \frac{\log_a m}{\log_a n}$

(ii) $\log_a m - \log_a n \neq \log_a(m - n)$

(iii) $\log_a\left(\frac{1}{n}\right) = \log_a 1 - \log_a n = -\log_a n, \ldots\ldots (\because \log_a 1 = 0)$

مثال 1

لوگارتھم کی مدد سے $\frac{291.3}{42.36}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ

$$x = \frac{291.3}{42.36} \Rightarrow \log x = \log\left(\frac{291.3}{42.36}\right)$$

یا $\log x = \log 291.3 - \log 42.36, \ldots\ldots (\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n)$

$$= 2.4643 - 1.6269 = 0.8374$$

$$\therefore \quad x = \text{antilog } 0.8374 = 6.877$$

مثال 2

لوگارتھم کی مدد سے $\frac{0.002913}{0.04236}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ

$$y = \frac{0.002913}{0.04236} \Rightarrow \log y = \log\left(\frac{0.002913}{0.04236}\right)$$

یا $\log y = \log 0.002913 - \log 0.04236$

$$= \bar{3}.4643 - \bar{2}.6269$$

$$= \bar{3} + (0.4643 - 0.6269) - \bar{2}$$

$$= \bar{3} - 0.1626 - \bar{2}$$

$= \bar{3} + (1 - 0.1626) - 1 - \bar{2},$ ('1'، جمع اور تفریق کرنے سے)

$= \bar{2}.8374 \qquad [\because \bar{3} - 1 - \bar{2} = -3 - 1 - (-2) = -2 = \bar{2}]$

$\Rightarrow \quad y = \text{antilog} \quad \bar{2}.8374 = 0.06877$

قانون (iii) $\log_a(m^n) = n \log_a m$

ثبوت فرض کریں کہ $\log_a m^n = x, \Rightarrow a^x = m^n$

اور $\log_a m = y, \Rightarrow a^y = m$

$\therefore \quad a^x = m^n = (a^y)^n$

یا $a^x = (a^y)^n = a^{yn} \Rightarrow x = ny$

x اور y کی قیمت درج کرنے سے $\therefore \quad \log_a m^n = n \log_a m$

مثال 1

لوگارتھم کی مدد سے $\sqrt[4]{(0.0163)^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

فرض کریں کہ $y = \sqrt[4]{(0.0163)^3} = (0.0163)^{3/4}$

$$\Rightarrow \quad \log y = \frac{3}{4}(\log 0.0163) = \frac{3}{4} \times \bar{2}.2122 = \frac{\bar{6}.6366}{4} = \frac{\bar{8} + 2.6366}{4}$$

$= \bar{2} + 0.6592 = \bar{2}.6592$

$\Rightarrow \quad y = \text{antilog} \quad \bar{2}.6592$

$= 0.04562$

قانون (iv)

(اساس کی تبدیلی کا فارمولا)

$$\log_a n = \log_b n \times \log_a b \quad \text{یا} \quad \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

ثبوت فرض کریں کہ

$$\log_b n = x \Rightarrow n = b^x$$

'a' کی اساس پر طرفین کا log لینے سے

$$\log_a n = \log_a b^x = x \log_a b$$

$$\therefore \quad \log_a n = \log_b n \log_a b$$ x ...... (i) کی قیمت درج کرنے سے

نتیجہ (i) میں $n = a$ درج کرنے سے

$$\log_b a \times \log_a b = \log_a a = 1$$

یا $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

(i) میں $\log_a b$ کی قیمت درج کرنے سے

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a} \quad \text{...... (ii)}$$

مندرجہ بالا قانون کی مدد سے قدرتی لوگارتھم کو عام لوگارتھم میں اور عام لوگارتھم کو قدرتی لوگارتھم میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

$$\log_e n = \log_{10} n \times \log_e 10 \quad \text{یا} \quad \frac{\log_{10} n}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} n = \log_e n \times \log_{10} e \quad \text{یا} \quad \frac{\log_e n}{\log_e 10}$$

لوگارتھم جدول میں $\log_{10} e$ اور $\log_e 10$ کی قیمت دستیاب ہے۔

$$\log_e 10 = \frac{1}{0.4343} = 2.3026 \text{ اور } \log_{10} e = \log 2.718 = 0.4343$$

مثال مندرجہ بالا قانون کی مدد سے $\log_2 3 \times \log_3 8$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل ہم جانتے ہیں کہ

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$$\therefore \log_2 3 \times \log_3 8 = \frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 8}{\log 3}$$

$$\log_2 3 \times \log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$= \frac{\log 2^3}{\log 2}$$

$$= \frac{3 \log 2}{\log 2} = 3$$

نوٹ

(i)	اساس کی تبدیلی کا قانون حاصل ضرب شکل (form) میں اکثر اوقات موزوں رہتا ہے۔
(ii)	1، e اور 10 کے علاوہ کسی بھی مثبت اساس پر لوگارتھم کو متعارف کرانا ایسی مساوات کو حل کرنے کے لیے کارآمد ہے جس میں نامعلوم کسی اور عدد کی قوت نما کے طور پر ظاہر ہو۔

مشق 3.3

1 مندرجہ ذیل کو لوگارتھم کے مجموعے یا فرق کی شکل میں لکھیں۔

(i) $\log (A \times B)$ (ii) $\log \frac{15.2}{30.5}$ (iii) $\log \frac{25 \times 5}{8}$

(iv) $\log \sqrt[3]{\frac{7}{15}}$ (v) $\log \frac{(22)^{1/3}}{5^3}$ (vi) $\log \frac{25 \times 47}{29}$

2 واحد لوگارتھم کی شکل میں ظاہر کیجیے۔

$$\log x - 2 \log x + 3 \log (x + 1) - \log (x^2 - 1)$$

3 مندرجہ ذیل کو واحد لوگارتھم کی شکل میں لکھیں۔

(i) $\log 21 + \log 5$ (ii) $\log 25 - 2 \log 3$

(iii) $2 \log x - 3 \log y$ (iv) $\log 5 + \log 6 - \log 2$

4 مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کیجیے۔

(i) $\log_3 2 \times \log_2 81$ (ii) $\log_5 3 \times \log_3 25$

5 اگر $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771, \log 5 = 0.6990$ مندرجہ ذیل کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log 32$ (ii) $\log 24$ (iii) $\log \sqrt{3\frac{1}{3}}$

(iv) $\log \frac{8}{3}$ (v) $\log 30$

3.5 لوگارتھم کے قوانین کا عددی وضاحت میں استعمال

اب تک ہم نے لوگارتھم کے قوانین کو آسان قسم کی عددی ضرب، تقسیم، قوت نما اور جذر لینے کے عوامل کے لیے استعمال کیا ہے۔ زیادہ مشکل مثالوں میں ان کے استعمال کے مؤثر ہونے کی تصدیق اور وضاحت درج ذیل ہے۔

مثال 1 ثابت کریں کہ

$$7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$$

حل

بائیں طرف $= 7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80}$

$$= 7[\log 16 - \log 15] + 5[\log 25 - \log 24] + 3[\log 81 - \log 80]$$

$$= 7[\log 2^4 - \log (3 \times 5)] + 5[\log 5^2 - \log (2^3 \times 3)] + 3[\log 3^4 - \log (2^4 \times 5)]$$

$$= 7[4 \log 2 - \log 3 - \log 5] + 5[2 \log 5 - 3 \log 2 - \log 3] + 3[4 \log 3 - 4 \log 2 - \log 5]$$

$$= (28 - 15 - 12) \log 2 + (-7 - 5 + 12) \log 3 + (-7 + 10 - 3)\log 5$$

$= \log 2 + 0 + 0 = \log 2 =$ دائیں طرف

مثال 2

$\sqrt[3]{\dfrac{0.07921 \times (18.99)^2}{(5.79)^4 \times 0.9474}}$ لوگارتھم کی مدد سے قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ

$$y = \sqrt[3]{\frac{0.07921 \times (18.99)^2}{(5.79)^4 \times 0.9474}} = \left(\frac{0.07921 \times (18.99)^2}{(5.79)^4 \times 0.9474}\right)^{1/3}$$

$$\therefore \quad \log y = \frac{1}{3} \log \left(\frac{0.07921 \times (18.99)^2}{(5.79)^4 \times 0.9474}\right)$$

$$= \frac{1}{3} [\log \{0.07921 \times (18.99)^2\} - \log \{(5.79)^4 \times 0.9474\}]$$

$$\log y = \frac{1}{3}[\log 0.07921 + 2\log 18.99 - 4\log 5.79 - \log 0.9474]$$

$$= \frac{1}{3}[\bar{2}.8988 + 2(1.2786) - 4(0.7627) - \bar{1}.9765]$$

$$= \frac{1}{3}[\bar{2}.8988 + 2.5572 - 3.0508 - \bar{1}.9765]$$

$$= \frac{1}{3}[1.4560 - 3.0273] = \frac{1}{3}(\bar{2}.4287)$$

$$= \frac{1}{3}(\bar{3} + 1.4287)$$

$$= \bar{1} + 0.4762 = \bar{1}.4762$$

$$\Rightarrow y = \text{antilog } \bar{1}.4762 = 0.2993$$

مثال 3

دیے گئے کلیہ $A = A_o e^{-kd}$ میں اگر $k = 2$ ہو تو d کی کس قیمت کے لیے $A = \frac{A_o}{2}$ ہو گا۔

حل دیا گیا کلیہ

$$A = A_o e^{-kd} \Rightarrow \frac{A}{A_o} = e^{-kd}$$

$$\therefore \quad k = 2, \text{ اور } A = \frac{A_o}{2}, \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-2d}$$

طرفین کا عام لوگارتھم لینے سے

$$\log_{10} 1 - \log_{10} 2 = -2d \log_{10} e \qquad (e \approx 2.718)$$

$$0 - 0.3010 = -2d\,(0.4343)$$

$$d = \frac{0.3010}{2 \times 0.4343} = 0.3465$$

مشق 3.4

-1 لوگارتھم جدول کی مدد سے مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) 0.8176×13.64 (ii) $(789.5)^{1/8}$ (iii) $\frac{0.678 \times 9.01}{0.0234}$

(iv) $\sqrt[5]{2.709} \times \sqrt[7]{1.239}$ (v) $\frac{(1.23)(0.6975)}{(0.0075)(1278)}$ (vi) $\sqrt[3]{\frac{0.7214 \times 20.37}{60.8}}$

(vii) $\frac{83 \times \sqrt[3]{92}}{127 \times \sqrt[5]{246}}$ (viii) $\frac{(438)^3 \sqrt{0.056}}{(388)^4}$

-2 ایک گیس کا پھیلاؤ مندرجہ ذیل قانون کے مطابق ہوتا ہے۔

$$pv^n = C$$

C کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $p = 80$ ، $v = 3.1$ اور $n = \frac{5}{4}$ ہو۔

-3 کسی پروڈکٹ (product) کی طلب کا فارمولا درج ذیل ہے۔

$$p = 90\ (5)^{-q/10}$$

جس میں q مصنوعہ (بنائے گئے) یونٹوں کی تعداد اور p ایک یونٹ کی قیمت ہے۔ بتائیں کہ 18.00 روپے میں کتنے یونٹ طلب کیے جا سکیں گے؟

-4 اگر $A = \pi r^2$ ہو تو A کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $r = 15$ اور $\pi = \frac{22}{7}$

-5 اگر $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہو تو V کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $r = 2.5$ ، $\pi = \frac{22}{7}$ اور $h = 4.2$

اعادہ مشق 3

-1 دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) اگر $a^x = n$ ہو تو ....

(a) $a = \log_x n$ (b) $x = \log_n a$ (c) $x = \log_a n$ (d) $a = \log_n x$

(ii) اگر $y = \log_z x$ ہو تو..............

(a) $x^y = z$ (b) $z^y = x$ (c) $x^z = y$ (d) $y^z = x$

(iii) کسی اساس پر '1' کا لوگارتھم .... کے برابر ہوتا ہے۔

(a) 1 (b) 10 (c) e (d) 0

(iv) اگر کسی عدد کے لوگارتھم کی اساس وہی عدد ہو تو جواب .... ہوتا ہے۔

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 10

(v) $\log e =$ ....۔ $(e \approx 2.718)$

(a) 0 (b) 0.4343 (c) ∞ (d) 1

(vi) $\log\left(\frac{p}{q}\right)$ کی قیمت = ...

(a) $\log p - \log q$ (b) $\frac{\log p}{\log q}$
(c) $\log p + \log q$ (d) $\log q - \log p$

(vii) $\log p - \log q =$ ....

(a) $\log\left(\frac{p}{q}\right)$ (b) $\log(p - q)$ (c) $\frac{\log p}{\log q}$ (d) $\log\left(\frac{p}{q}\right)$

(viii) $\log m^n$ کو .... بھی لکھا جا سکتا ہے۔

(a) $(\log m)^n$ (b) $m \log n$ (c) $n \log m$ (d) $\log (mn)$

(ix) $\log_b a \times \log_c b$ کو .... بھی لکھا جا سکتا ہے۔

(a) $\log_a c$ (b) $\log_c a$ (c) $\log_a b$ (d) $\log_b c$

(x) $\log_y x$ برابر ہو گا .... کے۔

(a) $\dfrac{\log_z x}{\log_y z}$ (b) $\dfrac{\log_x z}{\log_y z}$ (c) $\dfrac{\log_z x}{\log_z y}$ (d) $\dfrac{\log_z y}{\log_z x}$

-2 خالی جگہ پُر کر کے مندرجہ ذیل بیانات کو مکمل کریں۔

(i) عام لوگارتھم کی اساس............... ہوتی ہے۔

(ii) کسی عدد کے عام لوگارتھم کے صحیح عددی حصہ کو............... کہتے ہیں۔

(iii) کسی عدد کے عام لوگارتھم کے کسری حصہ کو............... کہتے ہیں۔

(iv) اگر $x = \log y$ ہو تو y کو x کا............... کہتے ہیں۔

(v) اگر کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '$\bar{2}$' ہو تو اس نمبر میں نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد صفروں کی تعداد............... ہو گی۔

(vi) اگر کسی عدد کے لوگارتھم کا خاصہ '1' ہو تو اس کے صحیح عددی حصّے میں ہندسوں کی تعداد............... ہو گی۔

-3 مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log_3 x = 5$ (ii) $\log_4 256 = x$

(iii) $\log_{625} 5 = \frac{1}{4} x$ (iv) $\log_{64} x = \frac{-2}{3}$

-4 مندرجہ ذیل میں x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) $\log x = 2.4543$ (ii) $\log x = 0.1821$

(iii) $\log x = 0.0044$ (iv) $\log x = \bar{1}.6238$

-5 مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔ اگر $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ اور $\log 5 = 0.6990$ ہو

(i) $\log 45$ (ii) $\log \frac{16}{15}$ (iii) $\log 0.048$

-6 لوگارتھم جدول کی مدد سے مندرجہ ذیل کو مختصر کریں۔

(i) $\sqrt[3]{25.47}$ (ii) $\sqrt[5]{342.2}$ (iii) $\dfrac{(8.97)^3 \times (3.95)^2}{\sqrt[3]{15.37}}$

خلاصہ

☆ اگر $a^x = y$ جبکہ $a,x,y \in R$ اور $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ ہو تو x کو اساس 'a' پر y کا لوگارتھم کہتے ہیں اور اسے $x = \log_a y$ لکھتے ہیں۔

☆ اگر $a^x = y$ ہو تو $x = \log_a y$

☆ اگر لوگارتھم کی اساس 10 لی جائے تو اسے عام یا برگز (Briggs) لوگارتھم کہتے ہیں۔ اساس e (≈ 2.718) کے لوگارتھم کو قدرتی یا نیپیرین (Naperian) لوگارتھم کہتے ہیں۔

☆ کسی عدد کے عام لوگارتھم کے صحیح عددی حصہ کو لوگارتھم کا خاصہ (characteristic) اور اسکے کسری حصہ کو مینٹیسا (mantissa) کہتے ہیں۔

☆ (i) '1' سے بڑے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ عدد کے صحیح عددی حصہ کے ہندسوں کی تعداد سے '1' کم ہوتا ہے۔

(ii) '1' سے چھوٹے عدد کے لوگارتھم کا خاصہ ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور عدد کے نقطہ اعشاریہ کے فوراً بعد موجود صفروں کی تعداد سے '1' زیادہ۔

☆ جب کوئی عدد '1' سے چھوٹا ہو تو خاصہ کو 1-,2-,3- کی بجائے $\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}$ لکھا جاتا ہے تاکہ مینٹیسا کو منفی نہ سمجھ لیا جائے۔ (یاد رہے کہ مینٹیسا ہمیشہ مثبت ہوتا ہے)

☆ ایک ہی تسلسل والے اہم ہندسوں پر مشتمل اعداد کے لوگارتھم کا مینٹیسا ایک ہی (یکساں) ہوتا ہے۔

☆ وہ عدد جس کے لوگارتھم کی قیمت معلوم ہو ضد لوگارتھم کہلاتا ہے۔

☆ $\log_{10} e = 0.4343$ اور $\log_e 10 = 2.3026$

☆ لوگارتھم کے قوانین

(i) $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$

(ii) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a (m^n) = n \log_a m$

(iv) $\log_a n = \log_b n \times \log_a b$

یونٹ 4

الجبری جملے اور الجبری کلیے
(ALGEBRAIC EXPRESSIONS AND ALGEBRAIC FORMULAS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

4.1 الجبری جملے (Algebraic Expressions)

4.2 الجبری کلیے (Algebraic Formulae)

4.3 مقادیرِ اصم اور ان کا استعمال (Surds and their Application)

4.4 ناطق بنانے کا عمل (Rationalization)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفسِ مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ان کو معلوم ہو کہ کوئی ناطق جملہ خصوصیات اور طرزِ عمل کے لحاظ سے ناطق عدد کی طرح ہوتا ہے۔

☆ تعریف کر سکیں کہ ایسا الجبری جملہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا جا سکتا ہو جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ متغیر x میں دو کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$، ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

☆ بغور مشاہدہ (پڑتال) کر سکیں کہ کوئی دیا گیا الجبری جملہ

- کثیر رقمی ہے یا نہیں
- ناطق جملہ ہے یا نہیں

☆ ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو مختصر ترین شکل میں تحویل کر سکیں جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام ارکان کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور ان میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔

☆ پڑتال کر سکیں کہ کوئی دیا گیا ناطق الجبری جملہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔

☆ دیے گئے ناطق جملہ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تحویل کر سکیں۔

☆ ناطق جملوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔

☆ ایک ناطق جملہ کو دوسرے ناطق جملے سے تقسیم کر کے جواب کو مختصر ترین شکل میں لکھ سکیں۔

☆ کسی الجبری جملے میں متغیر کی جگہ کوئی خاص حقیقی عدد درج کر کے الجبری جملے کی قیمت (جو کہ ایک حقیقی عدد ہو گا) حاصل کر سکیں۔

☆ درج ذیل کلیات سے واقف ہوں۔

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

- a^2+b^2 اور ab کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b$ اور $a-b$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔

☆ کلیہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ کی پہچان ہو اور

- $a^2+b^2+c^2$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b+c$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $a+b+c$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $a+b+c$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔

☆ کلیات :

$$(a+b)^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3ab(a-b)-b^3$$

کا علم ہو اور

- $a^3\pm b^3$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a\pm b$ اور ab کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- $x^3\pm\frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $x\pm\frac{1}{x}$ کی قیمت دی گئی ہو۔

☆ کلیات : $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ کو جانتے ہوں اور

- $(x+\frac{1}{x})$ اور $(x^2+\frac{1}{x^2}-1)$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔

- $(x-\frac{1}{x})$ اور $(x^2+\frac{1}{x^2}+1)$ کا حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔
- $(x+y)\ (x-y)\ (x^2+xy+y^2)\ (x^2-xy+y^2)$ کا متواتر (مسلسل) حاصل ضرب معلوم کر سکیں۔

☆ مقادیر اصم کو پہچان سکیں اور ان کو عملی طور پر استعمال کر سکیں۔

☆ دوسرے درجے کی مقادیر اصم کی وضاحت کر سکیں اور ان پر بنیادی عوامل کا استعمال کر کے مخرج (نسب نما) کو ناطق بنا کر ہم قیمت کسر میں تحویل کر سکیں۔

☆ حقیقی اعداد $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ اور ان کے اتصال سے حاصل کردہ عدد، جبکہ x ، y قدرتی اعداد اور a ، b صحیح اعداد ہوں، کو ناطق بنانے کے عمل کی (بالکل ٹھیک مطلب کے ساتھ) وضاحت کر سکیں۔

4.1 الجبری جملے (Algebraic Expressions)

حسابیات کے تعمیمی اطلاق کو الجبرا کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہوگا کہ الجبری رقوم کو جمع اور تفریق کے عوامل کے ذریعے ملانے سے ہم الجبری جملہ حاصل کرتے ہیں۔ مثال کے طور پر $5x^2-3x+\frac{2}{\sqrt{x}}$ اور $3xy+\frac{3}{x}\ (x\neq 0)$ الجبری جملے ہیں۔

کثیر رقمی جملہ یا کثیر رقمی (Polynomial)

ایک متغیر x میں کثیر رقمی جملہ درج ذیل کی قسم کا الجبری جملہ ہوتا ہے۔

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0,\quad a_n\neq 0,\qquad \ldots\ldots\ (i)$$

جس میں n ایک غیر منفی صحیح عدد (صفر یا مثبت صحیح عدد) ہے اور متغیر x کا سب سے بڑا قوت نما ہے اور کثیر رقمی (i) کا درجہ (ڈگری) کہلاتا ہے۔ یعنی (i) ایک متغیر x میں nth درجے کی کثیر رقمی ہے۔ علاوہ ازیں ہر عددی سر a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , ... a_1, a_0 حقیقی عدد ہے۔ x^n کے عددی سر a_n کو کثیر رقمی کا سب سے پہلا (اوّل) عددی سر کہتے ہیں۔ $(2x^4y^3+x^2y^2+8x)$ دو متغیرات میں کثیر رقمی جملہ ہے۔ اس کی رقم $2x^4y^3$ کا درجہ 7 (متغیرات کے قوت نماؤں کا مجموعہ) باقی رقموں کی نسبت سب سے بڑا ہے۔ اس لیے کثیر رقمی کا درجہ بھی 7 شمار ہوگا۔

جمع اور ضرب کے عوامل کے لحاظ سے صحیح اعداد اور کثیر رقمی جملوں میں ایک جیسی خصوصیات کے مطالعہ سے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ کثیر رقمی جملوں کا طرز عمل صحیح اعداد جیسا ہے۔

اپنی معلومات کو خود جانچیں

مندرجہ ذیل کے لیے جواز پیش کریں کہ کثیر رقمی ہے یا نہیں۔

(i) $3x^2 + 8x + 5$ (ii) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + 5x - 3$

(iii) $x^2 + \sqrt{x} - 4$ (iv) $\dfrac{3x^2 + 2x + 8}{3x + 4}$

4.1.1 ناطق جملے خصوصیات کے لحاظ سے ناطق اعداد جیسے ہوتے ہیں

اگر a اور b دو صحیح اعداد ہوں تو ضروری نہیں کہ $\dfrac{a}{b}$ بھی ایک صحیح عدد ہو۔ اس لیے نمبر سسٹم کو آگے بڑھانے کے لیے $\dfrac{a}{b}$ کو بطور ناطق عدد متعارف کرایا گیا جبکہ a اور b صحیح اعداد ہیں اور $b \neq 0$ اسی طرح اگر $p(x)$ اور $q(x)$ دو کثیر رقمی جملے ہوں تو ضروری نہیں کہ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ (جبکہ $q(x) \neq 0$) بھی ایک کثیر رقمی جملہ ہو۔ اس لیے ناطق اعداد کی طرح ناطق جملوں کے تصور کو اُجاگر کیا جاتا ہے۔

4.1.2 ناطق جملہ

ایسا جملہ جو $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا جا سکے جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$ ، ناطق جملہ کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر $\dfrac{2x+1}{3x+8}$ ، جبکہ $3x + 8 \neq 0$، ایک متغیر x میں ناطق جملہ ہے۔

ناطق جملہ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ میں $p(x)$ کو شمار کنندہ اور $q(x)$ کو مخرج (نَسب نُما) کہتے ہیں۔ ناطق جملہ $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ کا کثیر رقمی ہونا ضروری نہیں ہے۔

نوٹ ہر کثیر رقمی جملہ $p(x)$ ناطق جملہ ہوتا ہے کیونکہ ہم $p(x)$ کو $\dfrac{p(x)}{1}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں ۔ پس ہر کثیر رقمی جملہ ناطق ہوتا ہے مگر ہر ناطق جملے کا کثیر رقمی ہونا ضروری نہیں ہے۔

اپنی معلومات کو خود جانچیں

درج ذیل کی شناخت کریں کہ ناطق جملہ ہے یا نہیں۔

(i) $\dfrac{2x+6}{3x-4}$ (ii) $\dfrac{3x+8}{x^2+x+2}$ (iii) $\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+3\sqrt{x}+4}$ (iv) $\dfrac{\sqrt{x}}{3x^2+1}$

4.1.3 ناطق جملوں کی خصوصیات

ناطق جملوں پر بنیادی عوامل کا طریق کار ناطق اعداد پر عوامل جیسا ہی ہے۔

فرض کریں $p(x)$،$q(x)$،$r(x)$،$s(x)$ ایسے کثیر رقمی جملے ہیں۔ متغیر x کی وہ تمام قیمتیں خارج کر دی گئی ہیں جن کے حلقہ اثر میں کثیر رقمیوں سے بننے والے کسی ناطق جملے کی تعریف مبہم ہو جاتی ہو۔

اس مفروضہ کے تحت کہ ناطق جملوں کی تعریف مبہم نہیں، ان کی درج ذیل خصوصیات مؤثر اور صحیح ہیں۔

(i) ناطق جملوں کی برابری
$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{r(x)}{s(x)} \Leftrightarrow p(x)\,s(x)=q(x)\,r(x)$$

(ii) تنسیخی خاصیت (k ایک غیر صفر مستقل مقدار ہے)
$$\frac{p(x)k}{q(x)k}=\frac{p(x)}{q(x)}$$

(iii) ناطق جملوں کی جمع
$$\frac{p(x)}{q(x)}+\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)\,s(x)+q(x)\,r(x)}{q(x)\,s(x)}$$

(iv) ناطق جملوں کی تفریق
$$\frac{p(x)}{q(x)}-\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)\,s(x)-q(x)\,r(x)}{q(x)\,s(x)}$$

(v) ناطق جملوں کی ضرب
$$\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)\,r(x)}{q(x)\,s(x)}$$

(vi) ناطق جملوں کی تقسیم ($\frac{r(x)}{s(x)}$ غیر صفر ہے)
$$\frac{p(x)}{q(x)}\div\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{s(x)}{r(x)}=\frac{p(x)\,s(x)}{q(x)\,r(x)}$$

(vii) ناطق جملوں کا جمعی معکوس: $\frac{p(x)}{q(x)}$ کا جمعی معکوس $-\frac{p(x)}{q(x)}$ ہوتا ہے۔

(viii) ناطق جملوں کا ضربی معکوس: غیر صفر $\frac{p(x)}{q(x)}$ کا ضربی معکوس $\frac{q(x)}{p(x)}$ ہوتا ہے۔

4.1.4 ناطق جملے کی مختصر ترین شکل

ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہو گا۔ اگر

(i) $p(x)$ اور $q(x)$ کے تمام عددی سر صحیح اعداد ہوں۔

(ii) $p(x)$ اور $q(x)$ میں کوئی جزو ضربی مشترک نہ ہو۔

مثال کے طور پر $\frac{x+1}{x^2+3}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے۔

4.1.5 کسی ناطق جملے کا بغور مشاہدہ کر کے بتانا کہ مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں

ناطق جملے $\frac{p(x)}{q(x)}$ کا مشاہدہ کر کے یہ بتانا مقصود ہو کہ جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں، تو $p(x)$ اور $q(x)$ کا عاد اعظم معلوم کریں۔ اگر ان کثیر رقمیوں کا عاد اعظم '1' ہو تو ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہو گا۔

مثلاً ناطق جملہ $\frac{x-1}{x^2+1}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے۔ کیونکہ $(x-1)$ اور (x^2+1) کا عاد اعظم '1' ہے۔

4.1.6 کسی ناطق جملے کو اس کی مختصر ترین شکل میں لانے کا طریق کار

فرض کریں دیا گیا ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ ہے۔

I دونوں کثیر رقمی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ ہر ایک کی تجزی کریں۔

II $p(x)$ اور $q(x)$ کا عاد اعظم معلوم کریں۔

III $p(x)$ اور $q(x)$ دونوں کو عاد اعظم پر تقسیم کریں اس طرح حاصل کردہ ناطق جملہ $\frac{p(x)}{q(x)}$ میں مختصر ترین شکل میں ہو گا۔

دوسرے الفاظ میں ناطق الجبری جملے $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو اس کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے سب سے پہلے $p(x)$ اور $q(x)$ دونوں کی تجزی کریں۔ پھر ان کے مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ کر دیں۔

مثال

درج ذیل الجبری ناطق جملوں کو ان کی مختصر ترین شکل میں لکھیں۔

(i) $\frac{lx+mx-ly-my}{3x^2-3y^2}$ (ii) $\frac{3x^2+18x+27}{5x^2-45}$

حل

(i) $$\frac{lx+mx-ly-my}{3x^2-3y^2}=\frac{x(l+m)-y(l+m)}{3(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{(l+m)(x-y)}{3(x+y)(x-y)}$$ ...... (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{l+m}{3(x+y)}$$ ...... (مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ سے)

جو اب مختصر ترین شکل میں ہے۔

(ii) $$\frac{3x^2+18x+27}{5x^2-45} = \frac{3(x^2+6x+9)}{5(x^2-9)}$$ ...... (یک رقمی اجزائے ضربی)

$$= \frac{3(x+3)(x+3)}{5(x+3)(x-3)}$$ ...... (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{3(x+3)}{5(x-3)}$$ ...... (مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ سے)

جو مختصر ترین شکل میں ہے۔

4.1.7 ناطق جملوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب

الجبری ناطق جملوں کا مجموعہ اور فرق معلوم کرنے کے لیے ہم نسب نماؤں کا ذواضعاف اقل لے کر 4.1.3 میں بیان کردہ خصوصیات استعمال کرتے ہیں۔ مختصر کرنے کے طریق کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 مختصر کریں۔

(i) $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{x^2-y^2}$ (ii) $\frac{2x^2}{x^4-16} - \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2}$

حل

(i) $$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} + \frac{2x}{(x+y)(x-y)}$$ (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{x+y-(x-y)+2x}{(x+y)(x-y)}$$ (خصوصیات (iii)-4.1.3)

$$= \frac{x + y - x + y + 2x}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{2x + 2y}{(x + y)(x - y)}$$ ...... (مختصر کرنے سے)

$$= \frac{2(x + y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{2}{x - y}$$ ...... (مشترک اجزائے ضربی کی تنسیخ سے)

(ii) $\frac{2x^2}{x^4 - 16} - \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2}$

$$= \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} - \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2}$$ ...... (دو مربعوں کے فرق کا کلیہ)

$$= \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)} - \frac{x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{1}{x + 2}$$

$$= \frac{2x^2 - x(x^2 + 4) + (x^2 + 4)(x - 2)}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)} = \frac{2x^2 - x^3 - 4x + x^3 + 4x - 2x^2 - 8}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}$$

$$= \frac{-8}{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}$$ ...... (مختصر کرنے سے)

$$= \frac{-8}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)} = \frac{-8}{x^4 - 16}$$

مثال 2

$\frac{x + 2}{2x - 3y} \cdot \frac{4x^2 - 9y^2}{xy + 2y}$ کو مختصر ترین شکل میں لکھیں۔

حل

$$\frac{x + 2}{2x - 3y} \cdot \frac{4x^2 - 9y^2}{xy + 2y} = \frac{(x + 2)[(2x)^2 - (3y)^2]}{(2x - 3y)(x + 2)y}$$ ...... (یک جملہ اجزائے ضربی)

$$= \frac{(x + 2)(2x + 3y)(2x - 3y)}{y(x + 2)(2x - 3y)}$$ ...... (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{2x + 3y}{y}$$ ...... (مختصر ترین شکل میں لکھنے سے)

4.1.8 ایک ناطق جملے کو کسی دوسرے ناطق جملہ پر تقسیم کرنا

ایک ناطق جملے کو کسی دوسرے غیر صفر ناطق جملے پر تقسیم کرنے کے لیے سب سے پہلے ہم تقسیم کنندہ یعنی تقسیم کرنے والے ناطق جملہ کا معکوس لے کر تقسیم کو ضرب کے عمل میں بدلتے ہیں اور پھر اس طرح حاصل ہونے والے حاصل ضرب کو اختصار کے عمل سے مختصر ترین شکل میں لکھتے ہیں۔

مثال مختصر کیجیے۔

$$\frac{7xy}{x^2-4x+4} \div \frac{14y}{x^2-4}$$

حل

$$\frac{7xy}{x^2-4x+4} \div \frac{14y}{x^2-4}$$

$$= \frac{7xy}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{14y} \quad \ldots\ldots$$ (’÷‘ کو ’×‘ میں بدلنے سے)

$$= \frac{7xy}{(x-2)\,(x-2)} \cdot \frac{(x+2)\,(x-2)}{14y} \quad \ldots\ldots$$ (تجزی کرنے سے)

$$= \frac{x(x+2)}{2(x-2)} \quad \ldots\ldots$$ (مختصر ترین شکل)

4.1.9 الجبری جملے کی قیمت (کسی مخصوص حقیقی عدد کے لیے) معلوم کرنا

تعریف

ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات پر مشتمل الجبری جملہ میں متغیرات کی جگہ ان کی مخصوص قیمتیں (حقیقی اعداد) درج کی جائیں تو حاصل ہونے والا عدد الجبری جملہ کی قیمت کہلاتا ہے۔

مثال

$\frac{3x^2\sqrt{y}+6}{5(x+y)}$ کی قیمت معلوم کریں۔ جبکہ $x=-4$ اور $y=9$ ہو۔

حل

دی گئی قیمتیں $x=-4$ اور $y=9$ درج کرنے سے

$$\frac{3x^2\sqrt{y}+6}{5(x+y)} = \frac{3(-4)^2\sqrt{9}+6}{5(-4+9)} = \frac{3(16)\,(3)+6}{5(5)} = \frac{150}{25} = 6$$

مشق 4.1

-1 شناخت کیجیے کہ درج ذیل الجبری جملے کثیر رقمی ہیں یا نہیں (ہاں یا نہیں)۔

(i) $3x^2 + \frac{1}{x} - 5$ (ii) $3x^3 - 4x^2 - x\sqrt{x} + 3$

(iii) $x^2 - 3x + \sqrt{2}$ (iv) $\frac{3x}{2x-1} + 8$

-2 بیان کریں کہ درج ذیل جملے ناطق جملے ہیں یا نہیں۔

(i) $\frac{3\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+5}$ (ii) $\frac{x^3 - 2x^2 + \sqrt{3}}{2 + 3x - x^2}$

(iii) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$ (iv) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}$

-3 درج ذیل ناطق جملوں کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{120\,x^2y^3z^5}{30x^3yz^2}$ (ii) $\frac{8a(x+1)}{2(x^2-1)}$

(iii) $\frac{(x+y)^2 - 4xy}{(x-y)^2}$ (iv) $\frac{(x^3 - y^3)\,(x^2 - 2xy + y^2)}{(x-y)\,(x^2 + xy + y^2)}$

(v) $\frac{(x+2)\,(x^2-1)}{(x+1)\,(x^2-4)}$ (vi) $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 8}$

(vii) $\frac{64x^5 - 64x}{(8x^2+8)\,(2x+2)}$ (viii) $\frac{9x^2 - (x^2-4)^2}{4 + 3x - x^2}$

-4 قیمت معلوم کریں۔

(a) $\frac{x^3y - 2z}{xz}$

جبکہ (i) $x = 3, y = -1, z = -2$ (ii) $x = -1, y = -9, z = 4$

(b) $\frac{x^2y^3 - 5z^4}{xyz}$ جبکہ $x = 4, y = -2, z = -1$

5- دیے گئے عمل کی تکمیل کرتے ہوئے مختصر کریں۔

(i) $\frac{15}{2x-3y}-\frac{4}{3y-2x}$ (ii) $\frac{1+2x}{1-2x}-\frac{1-2x}{1+2x}$

(iii) $\frac{x^2-25}{x^2-36}-\frac{x+5}{x+6}$ (iv) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$

(v) $\frac{x-2}{x^2+6x+9}-\frac{x+2}{2x^2-18}$ (vi) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4-1}$

6- دیے گئے عمل (عوامل) سے مختصر کریں۔

(i) $(x^2-49)\cdot\frac{5x+2}{x+7}$ (ii) $\frac{4x-12}{x^2-9}\div\frac{18-2x^2}{x^2+6x+9}$

(iii) $\frac{x^6-y^6}{x^2-y^2}\div(x^4+x^2y^2+y^4)$ (iv) $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x+5}{1-x}$

(v) $\frac{x^2+xy}{y(x+y)}\cdot\frac{x^2+xy}{y(x+y)}\div\frac{x^2-x}{xy-2y}$

4.2 الجبری کلیات (Algebraic Formulae)

4.2.1 درج ذیل کلیات کا استعمال

(i) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ اور $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

(a^2+b^2) اور ab کی قیمتیں معلوم کرنے کے طریقہ کی وضاحت درج ذیل مثال سے کی جاتی ہے۔

مثال

اگر $a+b=7$ اور $a-b=3$ ہو تو (a^2+b^2) اور ab کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل

دی گئی قیمتیں ہیں $a-b=3$ اور $a+b=7$

$a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے کلیہ

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$a+b=7$ اور $a-b=3$ درج کرنے سے

$$(7)^2 + (3)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad 49 + 9 = 2(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad 58 = 2(a^2+b^2) \quad \text{......}$$ (مختصر کرنے سے)

$$\Rightarrow \quad 29 = a^2 + b^2 \quad \text{......}$$ (2 پر تقسیم کرنے سے)

ab کی قیمت معلوم کرنے کے لیے کلیہ

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow \quad (7)^2 - (3)^2 = 4ab \quad \text{......}$$ (دی گئی قیمتیں درج کرنے سے)

$$\Rightarrow \quad 49 - 9 = 4ab$$

$$40 = 4ab \quad \text{......}$$ (مختصر کرنے سے)

$$\Rightarrow \quad 10 = ab$$ لہٰذا (4 پر تقسیم کرنے سے)

(ii) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

یہ فارمولا سہ رقمی جملہ کے مربع کے لیے ہے اور تین جملوں $(a+b+c)$ ، $(a^2+b^2+c^2)$ اور $2(ab+bc+ca)$ پر مشتمل ہے۔ ان تین جملوں میں سے اگر دو جملوں کی قیمت دی گئی ہو تو تیسرے جملے کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔ طریق کار کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1

اگر $a^2+b^2+c^2 = 43$ اور $ab+bc+ca = 3$ ہو تو $a+b+c$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

دی گئی قیمتیں $ab + bc + ca = 3$ اور $a^2 + b^2 + c^2 = 43$ درج کرنے سے

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 43 + 2 \times 3$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \quad a+b+c = \pm\sqrt{49}$$

$$\therefore \quad a+b+c = \pm 7$$

مثال 2

اگر $a + b + c = 6$ اور $a^2 + b^2 + c^2 = 24$ ہو تو $ab + bc + ca$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\therefore \quad (6)^2 = 24 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \quad 36 = 24 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \quad 12 = 2(ab + bc + ca)$$

$$\therefore \quad ab + bc + ca = 6$$

مثال 3

اگر $a + b + c = 7$ اور $ab + bc + ca = 9$ ہو تو $a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$\Rightarrow \quad (7)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(9)$$

$$\Rightarrow \quad 49 = a^2 + b^2 + c^2 + 18$$

$$\Rightarrow \quad 31 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \quad a^2 + b^2 + c^2 = 31$$

(iii) $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

مثال 1

اگر $2x - 3y = 10$ اور $xy = 2$ ہو تو $8x^3 - 27y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

دی گئی قیمت کے مطابق

$$2x - 3y = 10$$

$$\Rightarrow \quad (2x-3y)^3 = (10)^3$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 3 \times 2x \times 3y(2x-3y) = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 18xy(2x-3y) = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 18 \times 2 \times 10 = 1000$$

$$\Rightarrow \quad 8x^3 - 27y^3 - 360 = 1000$$

$$\therefore \quad 8x^3 - 27y^3 = 1360$$

مثال 2

اگر $x + \frac{1}{x} = 8$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل

دی گئی قیمت کے مطابق

$$x + \frac{1}{x} = 8$$

$$\Rightarrow \quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = (8)^3$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3\times x\times\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 512$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3\times\left(x+\frac{1}{x}\right) = 512$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+3\times 8 = 512$$

$$\Rightarrow \quad x^3+\frac{1}{x^3}+24 = 512$$

$$\therefore \quad x^3+\frac{1}{x^3} = 488$$

مثال 3

اگر $x-\frac{1}{x}=4$ ہو تو $x^3-\frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل دی گئی قیمت کے مطابق

$$x-\frac{1}{x} = 4$$

$$\Rightarrow \quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = 64$$

$$\Rightarrow \quad x^3-\frac{1}{x^3}-3x\times\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right) = 64$$

$$\Rightarrow \quad x^3-\frac{1}{x^3}-3(4) = 64$$

$$\Rightarrow \quad x^3-\frac{1}{x^3}-12 = 64$$

$$\Rightarrow \quad x^3-\frac{1}{x^3} = 64+12$$

$$\Rightarrow \quad x^3-\frac{1}{x^3} = 76$$

(iv) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2)$

$\left(x \pm \frac{1}{x}\right)$ اور $\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \pm 1\right)$ کے حاصل ضرب معلوم کرنے کے طریقہ کار کی وضاحت بھی مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1

$64x^3 + 343y^3$ کی تجزی کریں۔

حل

$$64x^3 + 343y^3 = (4x)^3 + (7y)^3$$
$$= (4x + 7y)\left[(4x)^2 - (4x)(7y) + (7y)^2\right]$$
$$= (4x + 7y)(16x^2 - 28xy + 49y^2)$$

مثال 2

$125x^3 - 1331y^3$ کی تجزی کریں۔

حل

$$125x^3 - 1331y^3 = (5x)^3 - (11y)^3$$
$$= (5x - 11y)\left[(5x)^2 + (5x)(11y) + (11y)^2\right]$$
$$= (5x - 11y)(25x^2 + 55xy + 121y^2)$$

مثال 3

حاصل ضرب معلوم کریں: $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - 1 + \frac{9}{4x^2}\right)$

حل

$$\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - 1 + \frac{9}{4x^2}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{2x}\right)\left[\left(\frac{2}{3}x\right)^2 - \left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{3}{2x}\right) + \left(\frac{3}{2x}\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{3}{2x}\right)^3$$
$$= \frac{8}{27}x^3 + \frac{27}{8x^3}$$

مثال4

حاصل ضرب معلوم کریں: $\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left(\frac{16}{25}x^2+\frac{25}{16x^2}+1\right)$

حل

$$\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left(\frac{16}{25}x^2+\frac{25}{16x^2}+1\right)$$

کلیے کے مطابق ترتیب دینے سے $=\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left(\frac{16x^2}{25}+1+\frac{25}{16x^2}\right)$

$$=\left(\frac{4}{5}x-\frac{5}{4x}\right)\left[\left(\frac{4}{5}x\right)^2+\left(\frac{4}{5}x\right)\left(\frac{5}{4x}\right)+\left(\frac{5}{4x}\right)^2\right]$$

$$=\left(\frac{4}{5}x\right)^3-\left(\frac{5}{4x}\right)^3=\frac{64}{125}x^3-\frac{125}{64x^3}$$

مثال 5

کلیے کی مدد سے مسلسل حاصل ضرب معلوم کریں۔

$$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

حل

$$(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)=(x^3)^2-(y^3)^2=x^6-y^6$$

مشق 4.2

-1 (i) اگر $a+b=10$ اور $a-b=6$ ہو تو (a^2+b^2) کی قیمت معلوم کریں۔

(ii) اگر $a+b=5$ اور $a-b=\sqrt{17}$ ہو تو ab کی قیمت معلوم کریں۔

-2 اگر $a^2+b^2+c^2=45$ اور $a+b+c=-1$ ہو تو $ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کریں۔

-3 اگر $m + n + p = 10$ اور $mn + np + mp = 27$ ہو تو $m^2 + n^2 + p^2$ کی قیمت معلوم کریں۔

-4 اگر $x^2 + y^2 + z^2 = 78$ اور $xy + yz + zx = 59$ ہو تو $x + y + z$ کی قیمت معلوم کریں۔

-5 اگر $x + y + z = 12$ اور $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ ہو تو $xy + yz + zx$ کی قیمت معلوم کریں۔

-6 اگر $x + y = 7$ اور $xy = 12$ ہو تو $x^3 + y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-7 اگر $3x + 4y = 11$ اور $xy = 12$ ہو تو $27x^3 + 64y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-8 اگر $x - y = 4$ اور $xy = 21$ ہو تو $x^3 - y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-9 اگر $5x - 6y = 13$ اور $xy = 6$ ہو تو $125x^3 - 216y^3$ کی قیمت معلوم کریں۔

-10 اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ ہو تو $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

-11 اگر $x - \frac{1}{x} = 7$ ہو تو $x^3 - \frac{1}{x^3}$ کی قیمت معلوم کریں۔

-12 اگر $\left(3x + \frac{1}{3x}\right) = 5$ ہو تو $\left(27x^3 + \frac{1}{27x^3}\right)$ کی قیمت معلوم کریں۔

-13 اگر $\left(5x - \frac{1}{5x}\right) = 6$ ہو تو $\left(125x^3 - \frac{1}{125x^3}\right)$ کی قیمت معلوم کریں۔

-14 تجزی کریں۔

(i) $x^3 - y^3 - x + y$ (ii) $8x^3 - \frac{1}{27y^3}$

-15 کلیات کی مدد سے حاصل ضرب معلوم کریں۔

(i) $(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$ (ii) $(x^3 - y^3)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$

(iii) $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

(iv) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)(4x^4 + 2x^2 + 1)(4x^4 - 2x^2 + 1)$

4.3 مقادیرِ اصم اور ان کا استعمال

4.3.1 تعریف

ایسی غیر ناطق مقدار (یا جملہ) جس میں جذری علامت $\sqrt{\ }$ کے نیچے ناطق مقدار درج ہو، اسے مقدارِ اصم کہتے ہیں۔

یعنی $\sqrt[n]{a}$ کو مقدارِ اصم کہیں گے اگر

(i) a ناطق ہو، (ii) $\sqrt[n]{a}$ غیر ناطق ہو

مثلاً $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ ، $\sqrt[3]{7}$ ، $\sqrt[4]{10}$ مقادیرِ اصم ہیں۔

لیکن $\sqrt{\pi}$ اور $\sqrt{2+\sqrt{17}}$ مقادیرِ اصم نہیں ہیں کیونکہ π اور $2+\sqrt{17}$ ناطق اعداد نہیں ہیں۔

نوٹ کریں کہ مقدارِ اصم $\sqrt[n]{a}$ میں n کو مقدارِ اصم کا درجہ (order) کہتے ہیں اور ناطق عدد 'a' کو مجذور (radicand) کہتے ہیں۔ $\sqrt[3]{7}$ تیسرے درجے کی مقدارِ اصم ہے۔

ہر مقدارِ اصم ایک غیر ناطق عدد ہوتی ہے۔ لیکن ہر غیر ناطق عدد مقدارِ اصم نہیں ہوتا۔ مثلاً مقدارِ اصم $\sqrt[3]{5}$ ایک غیر ناطق عدد لیکن غیر ناطق عدد $\sqrt{\pi}$ مقدارِ اصم نہیں ہے۔

4.3.2 مقادیرِ اصم پر بنیادی عوامل کا اطلاق

(a) مقادیرِ اصم کی جمع و تفریق

متشابہ مقادیرِ اصم (مقادیرِ اصم جن کے غیر ناطق اجزائے ضربی باہم برابر ہوں) کو جمع یا تفریق کر کے یک رقمی مقدارِ اصم کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال متشابہ مقادیرِ اصم والے ارکان کو اکٹھا کر کے (الجبری مجموعہ لیکر) مختصر کریں۔

(i) $4\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$ (ii) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{432}$

حل

(i) $4\sqrt{3} - 3\sqrt{27} + 2\sqrt{75}$

$$= 4\sqrt{3} - 3\sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{9}\,\sqrt{3} + 2\sqrt{25} \times \sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 10\sqrt{3}$$

$$= (4 - 9 + 10)\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

(ii) $\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{432}$

$$= \sqrt[3]{64 \times 2} - \sqrt[3]{125 \times 2} + \sqrt[3]{216 \times 2}$$

$$= \sqrt[3]{(4)^3 \times 2} - \sqrt[3]{(5)^3 \times 2} + \sqrt[3]{(6)^3 \times 2}$$

$$= \sqrt[3]{(4)^3}\,\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{(5)^3}\,\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{(6)^3}\,\sqrt[3]{2}$$

$$= 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2}$$

$$= (4 - 5 + 6)\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

(b) مقادیرِ اصم کی ضرب اور تقسیم

ایک ہی درجے کے مقادیرِ اصم کو ضرب دینے یا تقسیم کرنے کے لیے مقادیرِ اصم کے درج ذیل قوانین کو استعمال کرتے ہیں۔

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{اور} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

جواب کے طور پر حاصل کردہ مقدارِ اصم کا درجہ بھی وہی ہوتا ہے جو دی گئی مقادیرِ اصم کا درجہ ہو۔

اگر دی گئی مقادیرِ اصم جن کو ضرب دینا یا تقسیم کرنا مقصود ہو، ایک ہی درجے کی نہ ہوں تو ضروری ہے کہ پہلے انہیں یکساں درجے کی مقادیرِ اصم میں تحویل کریں۔

مثال مختصر کریں اور جواب کو سادہ ترین شکل میں لکھیں۔

(i) $\sqrt{14}\sqrt{35}$ (ii) $\dfrac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}$

حل

(i) $\sqrt{14}\sqrt{35} = \sqrt{14\times 35} = \sqrt{7\times 2\times 7\times 5} = \sqrt{(7)^2\times 2\times 5}$

$= \sqrt{(7)^2\times 10} = \sqrt{(7)^2}\times\sqrt{10} = 7\sqrt{10}$

(ii) دی گئی مقدارِ اصم $\dfrac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}$

$\sqrt{3}\sqrt[3]{2}$ میں درجے 2 اور 3 برابر نہیں ہیں۔ ان کا ذواضعاف اقل 6 ہے۔ اس لیے درجہ 6 کی مقادیرِ اصم میں تحویل کرتے ہوئے:

$$\sqrt{3} = (3)^{1/2} = (3)^{3/6} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[3]{2} = (2)^{1/3} = (2)^{2/6} = \sqrt[6]{(2)^2} = \sqrt[6]{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{27}\sqrt[6]{4}} = \frac{\sqrt[6]{12}}{\sqrt[6]{108}} = \sqrt[6]{\frac{12}{108}} = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$$

مختصر ترین شکل میں

$$\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2/6} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

مشق 4.3

-1 درج ذیل ہر ایک مقدارِ اصم کو مختصر ترین شکل میں لکھیں۔

(i) $\sqrt{180}$ (ii) $3\sqrt{162}$

(iii) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}$ (iv) $\sqrt[5]{96x^6y^7z^8}$

-2 مختصر کریں۔

(i) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{21}\sqrt{9}}{\sqrt{63}}$

(iii) $\sqrt[5]{243\,x^5\,y^{10}\,z^{15}}$ (iv) $\frac{4}{5}\sqrt[3]{125}$

(v) $\sqrt{21}\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}$

-3 متشابہ مقادیرِ اصم میں تحویل کر کے مختصر کریں۔

(i) $\sqrt{45}-3\sqrt{20}+4\sqrt{5}$ (ii) $4\sqrt{12}+5\sqrt{27}-3\sqrt{75}+\sqrt{300}$

(iii) $\sqrt{3}\,(2\sqrt{3}+3\sqrt{3})$ (iv) $2(6\sqrt{5}-3\sqrt{5})$

-4 مختصر کریں۔

(i) $(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

(iii) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ (iv) $\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(v) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)(x^2+y^2)$

4.4 مقادیرِ اصم کو ناطق بنانے کا طریقہ

(a) تعریفیں

(i) ایسی مقدارِ اصم جس میں ایک ہی رقم موجود ہو یک رقمی مقدارِ اصم کہلاتی ہے۔ مثلاً $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ وغیرہ۔

(ii) دو رقوم کے مجموعہ یا فرق پر مشتمل جملہ جس کے دونوں ارکان یک رقمی مقدارِ اصم ہوں یا یہ جملہ یک رقمی مقدارِ اصم اور ایک ناطق عدد کا مجموعہ ہو، دو رقمی مقدارِ اصم (binomial surd) کہلاتا ہے۔

مثلاً $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ یا $5+\sqrt{2}$ یا $8-\sqrt{11}$ وغیرہ، دو رقمی مقادیرِ اصم ہیں۔

ہم اس تعریف کو تین رقوم کے مجموعہ پر مشتمل سہ رقمی مقدارِ اصم (trinomial surd) تک بڑھا سکتے ہیں۔

(iii) جب کسی دو مقادیرِ اصم کا حاصلِ ضرب ایک ناطق عدد ہو تو ہر ایک مقدارِ اصم کو دوسرے کا ناطق جزوِ ضربی کہا جاتا ہے۔

(iv) کسی دی گئی مقدارِ اصم کو اس کے ناطق جزوِ ضربی سے ضرب دے کر ایک ناطق عدد حاصلِ ضرب کے طور پر حاصل کرنے کے عمل کو ناطق بنانے کا طریقہ کہتے ہیں۔

(v) درجہ دوم کے دو رقمی مقادیرِ اصم جو ایک ہی مقداروں پر مشتمل ہوں اور جن کے درمیان علامات مختلف ہوں (دونوں رقموں میں سے کم از کم ایک رقم مقدارِ اصم ہو) زوج مقادیرِ اصم (conjugate surds) کہلاتی ہیں۔ مثلاً $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ اور $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ایک دوسرے کے زوج مقادیرِ اصم ہیں۔ اسی طرح مقادیرِ اصم $x+\sqrt{y}$ کا زوج جملہ $x-\sqrt{y}$ ہے۔ زوج مقادیرِ اصم کا مثلاً $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ اور $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ کا حاصلِ ضرب $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$ لازماً ناطق مقدار ہوتی ہے۔ (جذری علامت سے آزاد)۔

اسی طرح $a+b\sqrt{m}$ اور اس کے زوج $a-b\sqrt{m}$ کا حاصلِ ضرب بھی جذری علامت کے بغیر ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر درج ذیل حاصلِ ضرب

$$(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=(3)^2-(\sqrt{5})^2=9-5=4$$

ایک ناطق عدد ہے۔

(b) مقادیرِ اصم پر مشتمل کسور کے مخرج کو ناطق بنانا

مندرجہ بالا بحث کو مدِّنظر رکھتے ہوئے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مقادیرِ اصم پر مشتمل کسی کسر کے مخرج (نسب نما) جو $a+b\sqrt{x}$ (یا $a-b\sqrt{x}$) کی شکل میں ہو، کو ناطق بنالینا چاہیے۔ اس مقصد کے لیے ضروری ہے کہ کسر کے مخرج کو جس زوج جزوِ ضربی $a-b\sqrt{x}$ (یا $a+b\sqrt{x}$) سے ضربی دی جائے اسی سے شمار کنندہ کو بھی ضرب دیں۔ اس طرح جذری علامت خارج ہو جاتی ہے اور ہم ناطق مخرج حاصل کر لیتے ہیں۔

(c) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ کی اقسام کے حقیقی اعداد کو ناطق بنانا

دیے گئے جملوں $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ اور ان پر بنیادی عوامل کے اطلاق سے حاصل کردہ جملوں (جبکہ x ، y قدرتی اور a ، b صحیح اعداد ہیں) کو ناطق بنانے کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی گئی ہے۔

مثال 1

$\frac{58}{7-2\sqrt{5}}$ میں مخرج کو ناطق بنایئے۔

حل

مخرج کو ناطق بنانے کے لیے ہم شمار کنندہ اور مخرج دونوں کو $(7-2\sqrt{5})$ کے زوج $(7+2\sqrt{5})$ سے ضرب دیتے ہیں۔ یعنی

$$\frac{58}{7-2\sqrt{5}} = \frac{58}{7-2\sqrt{5}} \times \frac{7+2\sqrt{5}}{7+2\sqrt{5}} = \frac{58(7+2\sqrt{5})}{(7)^2-(2\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{58(7+2\sqrt{5})}{49-20}$$ (مخرج سے جذری علامت خارج ہو گئی ہے)

$$= \frac{58(7+2\sqrt{5})}{29} = 2(7+2\sqrt{5})$$

مثال 2

$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ میں مخرج کو ناطق بنائیں۔

حل

شمار کنندہ اور مخرج دونوں کو $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ کے زوج $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ سے ضرب دینے سے

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3}$$

مثال 3 مختصر کریں۔

$$\frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

حل

پہلے ہر ایک مخرج کو علیحدہ علیحدہ ناطق بنا کر اور پھر مختصر کرنے سے

$$\frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{6(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}-\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{6(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{12-6}+\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}-\frac{4\sqrt{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}$$

$$=\frac{12\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt{2}}{1}-\frac{4\sqrt{3}\sqrt{6}+4\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}$$

$$=2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6}=0$$

مثال 4

ناطق اعداد x اور y کی قیمتیں معلوم کریں جبکہ $\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}=x+y\sqrt{5}$

حل

دی گئی مقادیرِ اصم کی کسر

$$\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}=\frac{4+3\sqrt{5}}{4-3\sqrt{5}}\times\frac{4+3\sqrt{5}}{4+3\sqrt{5}}=\frac{(4+3\sqrt{5})^2}{(4)^2-(3\sqrt{5})^2}$$

$$=\frac{16+24\sqrt{5}+45}{16-45}=\frac{61+24\sqrt{5}}{-29}$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{61}{29}-\frac{24}{29}\sqrt{5}=x+y\sqrt{5}\qquad$$ (معلوم)

لہٰذا طرفین کا موازنہ کرنے سے

$$x=-\frac{61}{29}\ ,\ y=-\frac{24}{29}$$

مثال 5

اگر $x = 3 + \sqrt{8}$ ہو تو مندرجہ ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $x + \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

حل

$$\because \quad x = 3 + \sqrt{8}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{3+\sqrt{8}} = \frac{1}{3+\sqrt{8}} \times \frac{3-\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}} = \frac{3-\sqrt{8}}{(3)^2 - (\sqrt{8})^2}$$

$$= \frac{3-\sqrt{8}}{9-8} = 3 - \sqrt{8}$$

(i) $x + \frac{1}{x} = 3 + \sqrt{8} + 3 - \sqrt{8} = 6$

(ii) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 36$

یا $x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 36$

یا $x^2 + \frac{1}{x^2} = 34$

مشق 4.4

-1 مندرجہ ذیل کے مخرجوں کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{14}{\sqrt{98}}$ (iii) $\frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{27}}$ (iv) $\frac{1}{3+2\sqrt{5}}$

(v) $\frac{15}{\sqrt{31}-4}$ (vi) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (viii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

-2 $x+\sqrt{y}$ قسم کے درج ذیل مقادیرِ اصم کے زوج معلوم کیجیے۔

(i) $3+\sqrt{7}$ (ii) $4-\sqrt{5}$ (iii) $2+\sqrt{3}$ (iv) $2+\sqrt{5}$

(v) $5+\sqrt{7}$ (vi) $4-\sqrt{15}$ (vii) $7-\sqrt{6}$ (viii) $9+\sqrt{2}$

-3 (i) اگر $x=2-\sqrt{3}$ ہو تو $\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(ii) اگر $x=4-\sqrt{17}$ ہو تو $\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

(iii) اگر $x=\sqrt{3}+2$ ہو تو $x+\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

-4 مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$

(iii) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

-5 (i) اگر $x=2+\sqrt{3}$ ہو تو $x-\frac{1}{x}$ اور $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ کی قیمتیں معلوم کریں۔

(ii) اگر $x=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ ہو تو $x+\frac{1}{x}$ ، $x^2+\frac{1}{x^2}$ اور $x^3+\frac{1}{x^3}$ کی قیمتیں معلوم کریں۔

[اشارہ: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ اور $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$]

-6 اگر $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=a+b\sqrt{3}$ ہو تو ناطق اعداد a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

اعادہ مشق 4

-1 دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) $(4x+3y-2)$ ایک الجبری............ ہے۔

(a) جملہ (b) فقرہ (c) مساوات (d) غیر مساوات

(ii) کثیر رقمی $4x^4+2x^2y$ کا درجہ............ ہے۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(iii) $a^3 + b^3$ برابر ہے............

(a) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(c) $(a-b)(a^2-ab+b^2)$ (d) $(a-b)(a^2+ab-b^2)$

(iv) $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$ برابر ہے............

(a) 7 (b) −7 (c) −1 (d) 1

(v) مقدارِ اصم $a+\sqrt{b}$ کا زوج جملہ .... ہے۔

(a) $-a+\sqrt{b}$ (b) $a-\sqrt{b}$ (c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(vi) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$ برابر ہے............

(a) $\frac{2a}{a^2-b^2}$ (b) $\frac{2b}{a^2-b^2}$ (c) $\frac{-2a}{a^2-b^2}$ (d) $\frac{-2b}{a^2-b^2}$

(vii) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$ برابر ہے............

(a) $(a-b)^2$ (b) $(a+b)^2$ (c) $a+b$ (d) $a-b$

(viii) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ برابر ہے............

(a) a^2+b^2 (b) a^2-b^2 (c) $a-b$ (d) $a+b$

2- خالی جگہ پُر کریں۔

(i) کثیر رقمی $x^2y^2+3xy+y^3$ کا درجہ............ ہے۔

(ii) x^2-4 برابر ہے............

(iii) $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)(............)$

(iv) $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(............)^2$

(v) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=............$

(vi) مقدارِ اصم $\sqrt[3]{x}$ کا درجہ............ ہے۔

(vii) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}=............$

-3 اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

-4 اگر $x - \frac{1}{x} = 2$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (ii) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

-5 اگر $x + y = 5$ اور $x - y = 3$ ہو تو $x^3 + y^3$ اور xy کی قیمت معلوم کریں۔

-6 اگر $p = 2 + \sqrt{3}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $p + \frac{1}{p}$ (ii) $p - \frac{1}{p}$

(iii) $p^2 + \frac{1}{p^2}$ (iv) $p^2 - \frac{1}{p^2}$

-7 اگر $q = \sqrt{5} + 2$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $q + \frac{1}{q}$ (ii) $q - \frac{1}{q}$

(iii) $q^2 + \frac{1}{q^2}$ (iv) $q^2 - \frac{1}{q^2}$

-8 مختصر کریں۔

(i) $\frac{\sqrt{a^2+2} + \sqrt{a^2-2}}{\sqrt{a^2+2} - \sqrt{a^2-2}}$

(ii) $\frac{1}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}$

خلاصہ

☆ مستقل مقداروں یا متغیرات یا دونوں کو بنیادی عوامل کے ذریعے ملانے سے الجبری جملہ بنتا ہے۔

☆ کثیر رقمی سے مراد ایک ایسا جملہ ہے جو کئی رقموں پر مشتمل ہو۔

☆ ایک متغیر x میں کثیر رقمی جملے کا درجہ x کا سب سے بڑا قوت نما ہوتا ہے۔

☆ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل کا جملہ (جبکہ $q(x) \neq 0$) ناطق جملہ کہلاتا ہے۔ اگر $p(x)$ اور $q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں۔

☆ ایک غیر ناطق مقدار جس میں جذری علامت $\sqrt{\ }$ کے نیچے ناطق مقدار درج ہو اسے مقدارِ اصم کہتے ہیں۔

☆ $\sqrt[n]{x}$ میں، n کو مقدارِ اصم کا درجہ (order) اور ناطق عدد x کو مجذور (radicand) کہتے ہیں۔

☆ ایسی مقدارِ اصم جس میں ایک ہی رقم موجود ہو یک رقمی مقدارِ اصم کہلاتی ہے۔

☆ دو رقوم کے مجموعہ یا فرق پر مشتمل جملہ جس کے دونوں ارکان یک رقمی مقادیرِ اصم ہوں یا یہ جملہ یک رقمی مقدارِ اصم اور ایک ناطق عدد کا مجموعہ ہو اسے دو رقمی مقدارِ اصم (binomial surd) کہتے ہیں۔

☆ $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ کی زوج مقدارِ اصم $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ہوتی ہے۔

یونٹ 5.

تجزّی

(FACTORIZATION)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

5.1 تجزّی (Factorization)

5.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزّی (Remainder Theorem and Factor Theorem)

5.3 تین درجی کثیر رقمی کی تجزّی (Factorization of a Cubic Polynomial)

یونٹ میں طلبا کے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفسِ مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ان کو یاد آ جائے کہ وہ درج ذیل ٹائپ کے الجبری جملوں کی تجزّی کر چکے ہیں۔

- $ka + kb + kc$
- $ac + ad + bc + bd$
- $a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2$
- $a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$

☆ درج ذیل ٹائپ (قسم / طرز) کے جملوں کے اجزائے ضربی بنا سکیں۔

ٹائپ I: $a^4 + a^2b^2 + b^4$, $a^4 + 4b^4$

ٹائپ II: $x^2 + px + q$

ٹائپ III: $ax^2 + bx + c$

ٹائپ IV:
$$\begin{cases} (ax^2 + bx + c)\,(ax^2 + bx + d) + k \\ (x + a)\,(x + b)\,(x + c)\,(x + d) + k \\ (x + a)\,(x + b)\,(x + c)\,(x + d) + kx^2 \end{cases}$$

ٹائپ V $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ٹائپ VI $a^3 \pm b^3$

☆ مسئلہ باقی کو بیان اور ثابت کرنے کے علاوہ مثالوں سے اس کی وضاحت کر سکیں۔

☆ کسی کثیر رقمی جملے کو ایک درجے والی کثیر رقمی پر تقسیم کرنے سے (تقسیم کا عمل کیے بغیر) باقی کی قیمت معلوم کر سکیں۔

☆ کسی کثیر رقمی جملے میں موجود متغیر کی وہ قیمت معلوم کر سکیں جو جملے کی قیمت '0' کے برابر کر دے۔

☆ مسئلہ تجزی کو بیان اور ثابت کر سکیں۔

☆ مسئلہ تجزی کی مدد سے تین درجی کثیر رقمی کے اجزائے ضربی بنا سکیں۔

تعارف

تجزی کا ریاضی میں ایک اہم کردار ہے۔ اس سے پیچیدہ جملوں کا مطالعہ نسبتاً آسان اور سادہ جملوں کے مطالعہ میں بدل جاتا ہے۔ اس یونٹ میں ہم مختلف قسم کے کثیر رقمی جملوں کی تجزی کرنے کے طریقے سیکھیں گے۔

5.1 تجزی

اگر ہم کثیر رقمی جملے $p(x)$ کا اظہار کثیر رقمیوں $g(x)$ اور $h(x)$ کے حاصل ضرب یعنی $p(x) = g(x)h(x)$ کی شکل میں کر سکیں تو کثیر رقمیوں $g(x)$ اور $h(x)$ میں سے ہر ایک کثیر رقمی $p(x)$ کا جزو ضربی کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع: $ab + ac = a(b + c)$ میں

a اور $(b+c)$ جملہ $ab+ac$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

جب کوئی کثیر رقمی جملہ ایسے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھا گیا ہو کہ ہر جزو ضربی مفرد جملہ ہو تو دیے گئے کثیر رقمی جملے کی تجزّی کا عمل مکمل ہو جاتا ہے۔ ایسی تجزّی کو مکمل تجزی یا مفرد تجزّی کہتے ہیں۔

(a) $ka + kb + kc$ کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا

مثال 1 $5a - 5b + 5c$ کی تجزی کیجیے۔

حل دیا گیا جملہ $= 5a - 5b + 5c = 5(a - b + c)$ (5 ہر رقم میں مشترک ہے)

مثال 2 $5a - 5b - 15c$ کی تجزی کیجیے۔

حل دیا گیا جملہ $= 5a - 5b - 15c = 5(a - b - 3c)$

(b) $ac + ad + bc + bd$ کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا

$ac + ad + bc + bd$

$(ac + ad) + (bc + db)$ (مناسب گروپ بنانے سے)

$= a(c + d) + b(c + d)$ (a پہلے گروپ میں اور b دوسرے گروپ میں مشترک)

$= (a + b)(c + d)$ ($c+d$) مشترک لینے سے

وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں میں کیے گئے عمل پر غور کریں۔

مثال 1 $3x - 3a + xy - ay$ کی تجزّی کیجیے۔

حل دیے گئے کثیر رقمی جملے کو دوبارہ مناسب ترتیب دینے سے

$3x + xy - 3a - ay = x(3 + y) - a(3 + y)$ (یک رقمی اجزائے ضربی)

$= (3 + y)(x - a)$ ($3+y$) مشترک جزو ضربی ہے

مثال 2 $pqr + qr^2 - pr^2 - r^3$ کی تجزّی کیجیے۔

حل دیا گیا جملہ $= r(pq + qr - pr - r^2)$ (r یک رقمی جزو ضربی ہے)

$= r[(pq + qr) - pr - r^2]$ (رقموں کو ترتیب دینے سے)

$= r[q(p + r) - r(p + r)]$ (یک رقمی اجزائے ضربی)

$= r(p + r)(q - r)$ ($p+r$ مشترک لینے سے)

(c) $a^2 \pm 2ab + b^2$ کی قسم کے جملوں کی تجزّی کرنا

ہم جانتے ہیں کہ

(i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

(ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

وضاحت کے لیے مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1 $25x^2 + 16 + 40x$ کی تجزّی کیجیے۔

حل دیا گیا جملہ $= 25x^2 + 40x + 16 = (5x)^2 + 2(5x)(4) + (4)^2$

$= (5x + 4)^2$

$= (5x + 4)(5x + 4)$

مثال 2 $12x^2 - 36x + 27$ کی تجزی کریں۔

حل دیا گیا جملہ $= 12x^2 - 36x + 27 \quad = 3(4x^2 - 12x + 9)$

$$= 3(2x-3)^2$$

$$= 3(2x-3)\,(2x-3)$$

(d) **$a^2 - b^2$ کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا**

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال درج ذیل جملوں کی تجزی کیجیے۔

(i) $4x^2 - (2y-z)^2$ (ii) $6x^4 - 96$

حل

(i) $4x^2-(2y-z)^2 = (2x)^2 - (2y-z)^2$

$$= [2x - (2y-z)]\,[2x + (2y-z)]$$

$$= (2x - 2y + z)\,(2x + 2y - z)$$

(ii) $6x^4 - 96 = 6(x^4 - 16)$

$$= 6[(x^2)^2 - (4)^2]$$

$$= 6(x^2 - 4)\,(x^2 + 4)$$

$$= 6[(x)^2 - (2)^2]\,(x^2 + 4)$$

$$= 6(x-2)\,(x+2)\,(x^2+4)$$

(e) **$a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا**

ہم جانتے ہیں کہ

$$a^2 \pm 2ab + b^2 - c^2 = (a \pm b)^2 - (c)^2 = (a \pm b - c)(a \pm b + c)$$

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال تجزی کیجیے۔

(i) $x^2 + 6x + 9 - 4y^2$

(ii) $1 + 2ab - a^2 - b^2$

حل

(i) $x^2 + 6x + 9 - 4y^2 = (x+3)^2 - (2y)^2$

$$= (x + 3 + 2y)\,(x + 3 - 2y)$$

(ii) $1 + 2ab - a^2 - b^2 = 1 - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= (1)^2 - (a - b)^2$

$= [1 - (a - b)] [1 + (a - b)]$

$= (1 - a + b) (1 + a - b)$

مشق 5.1

درج ذیل جملوں کی تجزی کیجیے۔

1. (i) $2abc - 4abx + 2abd$ (ii) $9xy - 12x^2y + 18y^2$

(iii) $-3x^2y - 3x + 9xy^2$ (iv) $5ab^2c^3 - 10a^2b^3c - 20a^3bc^2$

(v) $3x^3y(x - 3y) - 7x^2y^2(x - 3y)$ (vi) $2xy^3(x^2 + 5) + 8xy^2(x^2 + 5)$

2. (i) $5ax - 3ay - 5bx + 3by$ (ii) $3xy + 2y - 12x - 8$

(iii) $x^3 + 3xy^2 - 2x^2y - 6y^3$ (iv) $(x^2 - y^2)z + (y^2 - z^2)x$

3. (i) $144a^2 + 24a + 1$ (ii) $\frac{a^2}{b^2} - 2 + \frac{b^2}{a^2}$

(iii) $(x + y)^2 - 14z(x + y) + 49z^2$ (iv) $12x^2 - 36x + 27$

4. (i) $3x^2 - 75y^2$ (ii) $x(x - 1) - y(y - 1)$

(iii) $128am^2 - 242an^2$ (iv) $3x - 243x^3$

5. (i) $x^2 - y^2 - 6y - 9$ (ii) $x^2 - a^2 + 2a - 1$

(iii) $4x^2 - y^2 - 2y - 1$ (iv) $x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3$

(v) $25x^2 - 10x + 1 - 36z^2$ (vi) $x^2 - y^2 - 4xz + 4z^2$

ٹائپ I $a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + 4b^4$ **کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا**

اس قسم کے جملوں کی تجزی کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1 $81x^4 + 36x^2y^2 + 16y^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل

$81x^4 + 36x^2y^2 + 16y^4$

$= (9x^2)^2 + 72x^2y^2 + (4y^2)^2 - 36x^2y^2$

$= (9x^2 + 4y^2)^2 - (6xy)^2$

$= (9x^2 + 4y^2 + 6xy) (9x^2 + 4y^2 - 6xy)$

$= (9x^2 + 6xy + 4y^2) (9x^2 - 6xy + 4y^2)$

مثال 2 $9x^4 + 36y^4$ کی تجزی کیجیے۔

حل

$$9x^4 + 36y^4 = 9x^4 + 36y^4 + 36x^2y^2 - 36x^2y^2$$
$$= (3x^2)^2 + 2(3x^2)(6y^2) + (6y^2)^2 - (6xy)^2$$
$$= (3x^2 + 6y^2)^2 - (6xy)^2$$
$$= (3x^2 + 6y^2 + 6xy)(3x^2 + 6y^2 - 6xy)$$
$$= (3x^2 + 6xy + 6y^2)(3x^2 - 6xy + 6y^2)$$

ٹائپ II $x^2 + px + q$ **کی قسم کے جملے کی تجزّی کرنا**

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال درج ذیل جملوں کی تجزّی کریں۔

(i) $x^2 - 7x + 12$ (ii) $x^2 + 5x - 36$

حل

(i) $x^2 - 7x + 12$

12 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے مناسب اور کارآمد دو اعداد (جمع اور منفی کی علامت کا خیال رکھتے ہوئے) 3- اور 4- ہیں۔ کیونکہ

$$(-3) + (-4) = -7 \quad \text{اور} \quad (-3)(-4) = 12$$

$$\therefore \; x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12$$
$$= x(x-3) - 4(x-3)$$
$$= (x-3)(x-4)$$

(ii) $x^2 + 5x - 36$

36 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے دو مناسب اور کارآمد اعداد 9 اور 4- ہیں۔ کیونکہ

$$9 + (-4) = 5 \quad \text{اور} \quad 9 \times (-4) = -36$$

$$\therefore \; x^2 + 5x - 36 = x^2 + 9x - 4x - 36$$
$$= x(x+9) - 4(x+9)$$
$$= (x+9)(x-4)$$

ٹائپ III $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$ کی قسم کے جملے کی تجزی کرنا

ہم تجزی کرنے کے طریقہ کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال   تجزی کیجیے۔

(i) $9x^2 + 21x - 8$ (ii) $2x^2 - 8x - 42$ (iii) $10x^2 - 41xy + 21y^2$

حل   (i) $9x^2 + 21x - 8$

دیے گئے جملے کا موازنہ $ax^2 + bx + c$ کے ساتھ کرنے سے ac کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$ac = (9)(-8) = -72$$

72 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے اعداد کا مناسب جوڑا 24 اور 3- ہے۔ جن کا

مجموعہ $= 24 + (-3) = 21$ (x کا عددی سر)

حاصل ضرب $= (24)(-3) = -72 = ac$

$$\therefore \quad 9x^2 + 21x - 8$$
$$= 9x^2 + 24x - 3x - 8$$
$$= 3x(3x + 8) - (3x + 8)$$
$$= (3x + 8)(3x - 1)$$

(ii) $2x^2 - 8x - 42 = 2(x^2 - 4x - 21)$

$x^2 - 4x - 21$ کا موازنہ $ax^2 + bx + c$ کے ساتھ کرنے سے ac کی حاصل کردہ قیمت:

$$ac = (+1)(-21) = -21$$

21 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے کارآمد جوڑا 7- اور 3+ ہے۔ جس کا

مجموعہ $= -7 + 3 = -4$ ، حاصل ضرب $= (-7)(3) = -21$

$$\therefore \quad x^2 - 4x - 21$$
$$= x^2 + 3x - 7x - 21$$
$$= x(x + 3) - 7(x + 3)$$
$$= (x + 3)(x - 7)$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 8x - 42 = 2(x^2 - 4x - 21) = 2(x + 3)(x - 7)$$

(iii) $10x^2 - 41xy + 21y^2$

اس قسم کے جملوں کی تجزی بھی مذکورہ بالا طریقہ سے کی جاسکتی ہے۔

اس صورت میں ac کی قیمت درج ذیل ہے۔ $ac = (10)(21) = 210$

210 کے ممکنہ اجزائے ضربی میں سے ہمارے لیے کارآمد جوڑا 35- اور 6- پر مشتمل ہے۔ جس کا

حاصل جمع $= -35 - 6 = -41$, حاصل ضرب $= (-35)(-6) = 210$

$$\therefore \quad 10x^2 - 41xy + 21y^2$$
$$= 10x^2 - 35xy - 6xy + 21y^2$$
$$= 5x(2x - 7y) - 3y(2x - 7y)$$
$$= (2x - 7y)(5x - 3y)$$

ٹائپ IV درج ذیل اقسام کے جملوں کے تجزی کرنا

$$(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$$
$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$$
$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$$

ان اقسام کے جملوں کی تجزی کرنے کا طریقہ مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کیا جائے گا۔

مثال 1 تجزی کیجیے۔

$$(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 4x - 12) - 144$$

حل فرض کریں $x^2 - 4x = y$

دیا گیا جملہ $= (y - 5)(y - 12) - 144 \quad = y^2 - 17y - 84$

$$= y^2 - 21y + 4y - 84$$
$$= y(y - 21) + 4(y - 21)$$
$$= (y - 21)(y + 4)$$
$$= (x^2 - 4x - 21)(x^2 - 4x + 4) \quad (\because \; y = x^2 - 4x)$$
$$= (x^2 - 7x + 3x - 21)(x - 2)^2$$
$$= [x(x - 7) + 3(x - 7)](x - 2)^2$$
$$= (x - 7)(x + 3)(x - 2)(x - 2)$$

مثال 2 تجزی کیجیے۔

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 120$$

حل ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $1 + 4 = 2 + 3$

اس سے ہماری توجہ دیے گئے جملے کے درج ذیل گروپ بنانے کی طرف جاتی ہے۔

$$[(x + 1)(x + 4)][(x + 2)(x + 3)] - 120$$
$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 120$$

فرض کریں کہ $x^2 + 5x = y$، تب

$$(y + 4)(y + 6) - 120$$
$$= y^2 + 10y + 24 - 120$$

$= y^2 + 10y - 96$

$= y^2 + 16y - 6y - 96$

$= y(y + 16) - 6(y + 16)$

$= (y + 16)(y - 6)$

$= (x^2 + 5x + 16)(x^2 + 5x - 6)$ ...... $(\because y = x^2 + 5x)$

$= (x^2 + 5x + 16)(x + 6)(x - 1)$

مثال 3 تجزی کریں۔

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) - 2x^2$$

حل $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x + 6) - 2x^2$

$= [x^2 - 3x - 2x + 6][x^2 + 3x + 2x + 6] - 2x^2$

$= [x(x - 3) - 2(x - 3)][x(x + 3) + 2(x + 3)] - 2x^2$

$= [(x - 3)(x - 2)][(x + 3)(x + 2)] - 2x^2$

$= [(x - 2)(x + 2)][(x - 3)(x + 3)] - 2x^2$

$= (x^2 - 4)(x^2 - 9) - 2x^2$

$= x^4 - 13x^2 + 36 - 2x^2$

$= x^4 - 15x^2 + 36$

$= x^4 - 12x^2 - 3x^2 + 36$

$= x^2(x^2 - 12) - 3(x^2 - 12)$

$= (x^2 - 12)(x^2 - 3)$

$= [(x)^2 - (2\sqrt{3})^2][(x)^2 - (\sqrt{3})^2]$

$= (x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

ٹائپ V درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مندرجہ ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال تجزی کیجیے۔

$$x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$$

حل

$x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2$

$= (x)^3 - (2y)^3 - 3(x)^2(2y) + 3(x)(2y)^2$

$= (x)^3 - 3(x)^2\,(2y) + 3(x)\,(2y)^2 - (2y)^3$
$= (x - 2y)^3$
$= (x - 2y)\,(x - 2y)\,(x - 2y)$

ٹائپ VI $a^3 \pm b^3$ کی قسم کے جملوں کی تجزی کرنا

درج ذیل کلیات کو ذہن میں لائیں۔

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

وضاحت کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کریں۔

مثال 1 $27x^3 + 64y^3$ کی تجزی کریں۔

حل

$$27x^3 + 64y^3 = (3x)^3 + (4y)^3$$
$$= (3x + 4y)\,[(3x)^2 - (3x)\,(4y) + (4y)^2]$$
$$= (3x + 4y)\,(9x^2 - 12xy + 16y^2)$$

مثال 2 $(1 - 125x^3)$ کی تجزی کریں۔

حل

$$1 - 125x^3 = (1)^3 - (5x)^3$$
$$= (1 - 5x)\,[(1)^2 + (1)\,(5x) + (5x)^2]$$
$$= (1 - 5x)\,(1 + 5x + 25x^2)$$

مشق 5.2

درج ذیل جملوں کی تجزی کریں۔

1. (i) $x^4 + \frac{1}{x^4} - 3$ (ii) $3x^4 + 12y^4$ (iii) $a^4 + 3a^2b^2 + 4b^4$
   (iv) $4x^4 + 81$ (v) $x^4 + x^2 + 25$ (vi) $x^4 + 4x^2 + 16$

2. (i) $x^2 + 14x + 48$ (ii) $x^2 - 21x + 108$
   (iii) $x^2 - 11x - 42$ (iv) $x^2 + x - 132$

3. (i) $4x^2 + 12x + 5$ (ii) $30x^2 + 7x - 15$
   (iii) $24x^2 - 65x + 21$ (iv) $5x^2 - 16x - 21$
   (v) $4x^2 - 17xy + 4y^2$ (vi) $3x^2 - 38xy - 13y^2$
   (vii) $5x^2 + 33xy - 14y^2$ (viii) $\left(5x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(5x - \frac{1}{x}\right) + 4,\ x \neq 0$

4. (i) $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3$

(ii) $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$

(iii) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-15$

(iv) $(x+4)(x-5)(x+6)(x-7)-504$

(v) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)-3x^2$

5. (i) $x^3+48x-12x^2-64$ (ii) $8x^3+60x^2+150x+125$

(iii) $x^3-18x^2+108x-216$ (iv) $8x^3-125y^3-60x^2y+150xy^2$

6. (i) $27+8x^3$ (ii) $125x^3-216y^3$

(iii) $64x^3+27y^3$ (iv) $8x^3+125y^3$

5.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزی

5.2.1 مسئلہ باقی (Remainder Theorem)

"اگر کسی کثیر رقمی جملے $p(x)$ کو یک درجی جملہ $(x-a)$ پر تقسیم کیا جائے تو $p(a)$ بطور باقی حاصل ہوتا ہے۔"

ثبوت

فرض کریں $p(x)$ کو $(x-a)$ پر تقسیم کرنے سے $q(x)$ بطور حاصل قسمت حاصل ہوتا ہے۔ لیکن تقسیم کنندہ $(x-a)$ کا درجہ ایک ہے اس لیے 'باقی' کا درجہ صفر ہوگا۔ یعنی باقی ایک غیر صفر مستقل مقدار، فرض کریں R ہوگی۔ لہٰذا علامتی طور پر ہم یہ لکھ سکتے ہیں کہ

$$p(x) = (x-a)\,q(x) + \text{R}$$

یہ مساوات متغیر x کی ہر قیمت کے لیے درست ہے۔ اس لیے بالخصوص $x = a$ کے لیے بھی درست ہوگی۔ نتیجتاً

$$p(a) = (a-a)\,q(a) + \text{R}$$

$$= 0 + \text{R} = \text{R}$$

یا $p(a) = \text{R} = (\text{باقی})$

نوٹ

اگر تقسیم کنندہ $(ax-b)$ ہو تو

$$p(x) = (ax-b)\,q(x) + \text{R}$$

اس مساوات میں $x = \frac{b}{a}$ درج کرنے سے، تاکہ $ax-b=0$ ہو

$$p\left(\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot q\left(\frac{b}{a}\right) + \text{R} = 0 + \text{R} = \text{R}$$

پس اگر تقسیم کنندہ جملے کا درجہ ایک ہو تو تقسیم کا لمبا عمل کیے بغیر مندرجہ بالا مسئلہ 'باقی' حاصل کرنے کا ایک مؤثر طریقہ فراہم کرتا ہے۔

5.2.2 جب کسی کثیر رقمی جملے کو ایک درجہ والے جملہ پر تقسیم کرنا ہو تو (تقسیم کا عمل کیے بغیر) باقی معلوم کرنا

مثال 1 مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کریں جب $9x^2 - 6x + 2$ کو درج ذیل جملوں پر تقسیم کیا جائے۔

(i) $x - 3$ (ii) $x + 3$ (iii) $3x + 1$ (iv) x

حل فرض کریں کہ $p(x) = 9x^2 - 6x + 2$

(i) مسئلہ باقی کی مدد سے $p(x)$ کو $x - 3$ پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p(3) = 9(3)^2 - 6(3) + 2 = 65$

(ii) $p(x)$ کو $x + 3 = x - (-3)$ پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p(-3) = 9(-3)^2 - 6(-3) + 2 = 101$

(iii) $p(x)$ کو $3x + 1$ پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p\left(-\frac{1}{3}\right) = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 5$

(iv) $p(x)$ کو x پر تقسیم کرنے سے،

باقی $R = p(0) = 9(0)^2 - 6(0) + 2 = 2$

مثال 2 اگر جملہ $x^3 + kx^2 + 3x - 4$ کو $x + 2$ پر تقسیم کرنے سے، باقی -2 بچے تو k کی قیمت معلوم کریں۔

حل فرض کریں کہ $p(x) = x^3 + kx^3 + 3x - 4$

$p(x)$ کو $x + 2 = x - (-2)$ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہونے والا باقی، مسئلہ باقی کی رو سے درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} p(-2) &= (-2)^3 + k(-2)^2 + 3(-2) - 4 \\ &= -8 + 4k - 6 - 4 \\ &= 4k - 18 \end{aligned}$$

دی گئی شرط کے مطابق

$$p(-2) = -2 \Rightarrow 4k - 18 = -2 \Rightarrow k = 4$$

5.2.3 کثیر رقمی جملے کا زیرو (Zero of a Polynomial)

تعریف

اگر کسی کثیر رقمی جملے $p(x)$ میں متغیر x کی جگہ ایک مخصوص نمبر 'a' درج کرنے سے $p(a) = 0$ حاصل ہو تو $x = a$ کو کثیر رقمی $p(x)$ کا زیرو (zero) کہتے ہیں۔

مسئلہ باقی کے ایک بہت کارآمد نتیجہ کو مسئلہ تجزی کہتے ہیں۔

5.2.4 مسئلہ تجزّی (Factor Theorem)

(i) ''اگر کسی کثیر رقمی $p(x)$ کے لیے $p(a) = 0$ ہو جائے تو $(x - a)$ کثیر رقمی کا ایک جزوِ ضربی ہوتا ہے۔''

(ii) ''اس کے برعکس اگر $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزوِ ضربی ہو تو $p(a) = 0$ ہوتا ہے۔''

ثبوت

فرض کریں کسی کثیر رقمی $p(x)$ کو $(x-a)$ پر تقسیم کرنے سے حاصل قسمت $q(x)$ اور باقی R حاصل ہوتا ہے۔

$$p(x) = (x-a)\ q(x) + R$$ پس

لیکن مسئلہ باقی کی رو سے $R = p(a)$

اس لیے

$$p(x) = (x-a)\ q(x) + p(a)$$

(i) اب اگر $p(a) = 0$ ہو تو

$$p(x) = (x-a)\ q(x)$$

یعنی $(x-a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا ایک جُزوِ ضربی ہے۔

(ii) اس کے برعکس، اگر $(x-a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہو تو $p(x)$ کو $(x-a)$ پر تقسیم کرنے سے باقی صفر کے برابر ہونا چاہیے۔ یعنی $p(a) = 0$

اس طرح مسئلہ تجزّی کا ثبوت مکمل ہو جاتا ہے۔

نوٹ

مسئلہ تجزّی کو درج ذیل الفاظ میں بھی بیان کیا جاسکتا ہے۔

''$(x-a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہو گا صرف اور صرف اگر $x=a$ مساوات $p(x)=0$ کے حل سیٹ کا رکن ہو۔''

مسئلہ تجزّی دیے گئے کثیر رقمی جملوں کے اجزائے ضربی معلوم کرنے میں ہماری مدد کرتا ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ مسئلہ تجزّی اس بات کا تعین کرتا ہے کہ $(x-a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہو گا یا نہیں۔ اس مقصد کے لیے ہم نے صرف یہ معلوم (check) کرنا ہوتا ہے کہ $p(a) = 0$ ہے یا نہیں ہے۔

مثال 1 تعین کریں کہ $(x-2)$ کثیر رقمی $x^3 - 4x^2 + 3x + 2$ کا جزوِ ضربی ہے یا نہیں۔

حل آسانی کی خاطر فرض کریں کہ

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

$(x-2)$ کے لیے حاصل ہونے والا باقی

$$p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 3(2) + 2$$
$$= 8 - 16 + 6 + 2 = 0$$

لہٰذا مسئلہ تجزّی کی رو سے $(x-2)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جُزوِ ضربی ہے۔

مثال 2 تین درجی کثیر رقمی $p(x)$ معلوم کریں جس کے زیرو $(p(x) = 0)$ کے حل سیٹ کے ارکان 2، 1- اور 3 ہیں۔

حل چونکہ $x = 2, -1, 3$ مساوات $p(x) = 0$ کے حل سیٹ کے ارکان ہیں۔

اس لیے مسئلہ تجزّی کی رو سے

$(x-2)$, $(x+1)$ اور $(x-3)$ کثیر رقمی $p(x)$ کے اجزائے ضربی ہیں۔

پس $p(x) = a(x-2)(x+1)(x-3)$

جبکہ a کے لیے کوئی بھی غیر صفر قیمت لگائی جا سکتی ہے۔ اگر $a = 1$ لیں تو

$$p(x) = (x-2)(x+1)(x-3)$$
$$= x^3 - 4x^2 + x + 6$$

جو مطلوبہ کثیر رقمی جملہ ہے۔

مشق 5.3

-1 مسئلہ باقی کی مدد سے باقی معلوم کیجیے جب

(i) $3x^3 - 10x^2 + 13x - 6$ کو $(x-2)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(ii) $4x^3 - 4x + 3$ کو $(2x-1)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(iii) $6x^4 + 2x^3 - x + 2$ کو $(x+2)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(iv) $(2x-1)^3 + 6(3+4x)^2 - 10$ کو $(2x+1)$ پر تقسیم کیا جائے۔

(v) $x^3 - 3x^2 + 4x - 14$ کو $(x+2)$ پر تقسیم کیا جائے۔

-2 (i) اگر $(x+2)$ کثیر رقمی $3x^2 - 4kx - 4k^2$ کا جُزوضربی ہو تو k کی قیمتیں معلوم کریں۔

(ii) اگر $(x-1)$ کثیر رقمی $x^3 - kx^2 + 11x - 6$ کا جُزوضربی ہو تو k کی قیمت معلوم کریں۔

-3 تقسیم کا عمل کیے بغیر تعین کریں کہ

(i) $(x-2)$ اور $(x-3)$ کثیر رقمی $p(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48$ کے اجزائے ضربی ہیں یا نہیں؟

(ii) $(x-2)$, $(x+3)$ اور $(x-4)$ کثیر رقمی $q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ کے اجزائے ضربی ہیں یا نہیں؟

-4 معلوم کیجیے کہ m کی کس قیمت کے لیے $x + 2$ کثیر رقمی $p(x) = 4x^3 - 7x^2 + 6x - 3m$ کو پورا پورا تقسیم کرے گا؟

-5 k کی کس قیمت کے لیے کثیر رقمیوں $p(x) = kx^3 + 4x^2 + 3x - 4$ اور $q(x) = x^3 - 4x + k$ کو $(x-3)$ پر تقسیم کرنے سے یکساں باقی بچے گا۔

6۔ کثیر رقمی $p(x)=x^3+ax^2+7$ کو $(x+1)$ پر تقسیم کرنے سے $2b$ باقی بچتا ہے۔ اگر اس کثیر رقمی کو $(x-2)$ پر تقسیم کرنے سے $(b+5)$ باقی بچے تو a اور b کی قیمت معلوم کریں۔

7۔ $(x+4)$ کثیر رقمی $x^3+lx^2+mx+24$ کا جزو ضربی ہے۔ اگر اس کثیر رقمی کو $(x-2)$ پر تقسیم کیا جائے تو باقی 36 بچتا ہے۔ l اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

8۔ کثیر رقمی lx^3+mx^2-4 کو $(x-1)$ اور $(x+2)$ پر تقسیم کرنے سے بالترتیب 3- اور 12 بطور باقی بچیں تو l اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

9۔ کثیر رقمی $ax^3-9x^2+bx+3a$ جملہ x^2-5x+6 پر پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔ a اور b کی قیمتیں معلوم کریں۔

5.3 تین درجی کثیر رقمی جملہ کی تجزّی

ہم مسئلہ تجزّی کی مدد سے کسی دی گئی تین درجی کثیر رقمی جملہ کی تجزّی کرنے کے عمل کی وضاحت درج ذیل طریقہ سے کرتے ہیں۔ یہ طریقہ خاص طور پر تین درجی کثیر رقمی جملہ کی تجزّی کے لیے بہت موزوں ہے۔ ہم ایک نہایت کارآمد مسئلہ (بغیر ثابت کیے) بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ (دی ہوئی مساوات کا ناطق حل معلوم کرنا)

فرض کریں کہ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,\quad a_0\neq 0$$

ایک متغیر x میں کثیر رقمی مساوات ہے جس کا درجہ n ہے اور تمام عددی سر صحیح اعداد ہیں۔ اس مساوات کے حل سیٹ کے ارکان میں کوئی ایک رکن ناطق عدد $\frac{p}{q}$ ہوگا اگر p مستقل مقدار a_n کا عاد اور q پہلے عددی سر a_0 (x^n کا عددی سر) کا عاد ہو۔

مثال مسئلہ تجزّی کی مدد سے کثیر رقمی x^3-4x^2+x+6 کی تجزّی معلوم کریں۔

حل فرض کریں دیا گیا کثیر رقمی جملہ: $P(x)=x^3-4x^2+x+6$

$P(x)$ میں مستقل مقدار 6 ہے اور پہلا عددی سر '1' ہے۔

$$6 \text{ کے تمام ممکن عاد} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$$

$$1 \text{ کے تمام ممکن عاد} = \pm1$$

لہٰذا مساوات $P(x)=0$ کے حل سیٹ کے ممکن ارکان درج ذیل میں سے ہوں گے۔

$$\frac{p}{q}=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$$

مسئلہ تجزی کی رو سے اگر $P(x)$ میں $x = a$ درج کرنے سے $P(a) = 0$ ہو تو $(x-a)$ کثیر رقمی $P(x)$ کا جُز وِ ضربی ہوگا۔

اب ہم $\frac{p}{q}$ کے ہر عاد کو باری باری چیک کریں گے کہ x کی جگہ درج کرنے سے $P(a) = 0$ ہو گا یا نہیں۔

سعی اور خطا طریقہ سے $x = 1$ کے لیے کوشش کرنے سے

$$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 1 + 6$$
$$= 1 - 4 + 1 + 6 = 4 \neq 0$$

لہٰذا $x - 1$ کثیر رقمی $P(x)$ کا جُز وِ ضربی نہیں ہے۔

اب $x = -1$ کے لیے کوشش کرنے سے

$$P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 1 + 6$$
$$= -1 - 4 - 1 + 6 = 0$$

لہٰذا $x - (-1) = (x + 1)$ کثیر رقمی $P(x)$ کا جُز وِ ضربی ہے۔

علاوہ ازیں $x = 2$ کے لیے کوشش کرنے سے

$$P(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 2 + 6$$
$$= 8 - 16 + 2 + 6 = 0$$

لہٰذا $(x - 2)$ کثیر رقمی $P(x)$ کا دوسرا جُز وِ ضربی ہے۔

اسی طرح

$$P(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 3 + 6$$
$$= 27 - 36 + 3 + 6 = 0$$

لہٰذا $(x - 3)$ کثیر رقمی $P(x)$ کا تیسرا جُز وِ ضربی ہے۔

پس تجزی کی شکل میں

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$
$$= (x + 1)\,(x - 2)\,(x - 3)$$

مشق 5.4

مسئلہ تجزّی کی مدد سے درج ذیل تین درجی کثیر رقمی جملوں کی تجزّی کیجیے۔

1. $x^3 - 2x^2 - x + 2$
2. $x^3 - x^2 - 22x + 40$
3. $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$
4. $x^3 + x^2 - 10x + 8$
5. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
6. $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$
7. $3x^3 - x^2 - 12x + 4$
8. $2x^3 + x^2 - 2x - 1$

اعادہ مشق 5

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) $x^2 - 5x + 6$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $x + 1, x - 6$ (b) $x - 2, x - 3$

(c) $x + 6, x - 1$ (d) $x + 2, x + 3.$

(ii) $8x^3 + 27y^3$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(2x + 3y),(4x^2 + 9y^2)$ (b) $(2x - 3y),(4x^2 - 9y^2)$

(c) $(2x + 3y),(4x^2 - 6xy + 9y^2)$ (d) $(2x - 3y),(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

(iii) $3x^2 - x - 2$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(x + 1),(3x - 2)$ (b) $(x + 1),(3x + 2)$

(c) $(x - 1),(3x - 2)$ (d) $(x - 1),(3x + 2)$

(iv) $a^4 - 4b^4$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(a - b),(a + b),(a^2 + 4b^2)$ (b) $(a^2 - 2b^2),(a^2 + 2b^2)$

(c) $(a - b),(a + b),(a^2 - 4b^2)$ (d) $(a - 2b),(a^2 + 2b^2)$

(v) $9a^2 - 12ab$ کو کامل مربع بنانے کے لیے اس میں کیا جمع کریں گے؟ ....

(a) $-16b^2$ (b) $16b^2$ (c) $4b^2$ (d) $-4b^2$

(vi) m کی کس قیمت کے لیے $x^2 + 4x + m$ کامل مربع بن جائے گا؟ ....

(a) 8 (b) -8 (c) 4 (d) 16

(vii) $5x^2 - 17xy - 12y^2$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $(x + 4y),(5x + 3y)$ (b) $(x - 4y),(5x - 3y)$

(c) $(x - 4y),(5x + 3y)$ (d) $(5x - 4y),(x + 3y)$

(viii) $27x^3 - \frac{1}{x^3}$ کے اجزائے ضربی .... ہیں۔

(a) $\left(3x - \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 + 3 + \frac{1}{x^2}\right)$ (b) $\left(3x + \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 + 3 + \frac{1}{x^2}\right)$

(c) $\left(3x - \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}\right)$ (d) $\left(3x + \frac{1}{x}\right),\left(9x^2 - 3 + \frac{1}{x^2}\right)$

2۔ تکمیلی سوالات۔ خالی جگہ اس طرح پُر کیجیے کہ بیان درست ہو۔

(i) $x^2 + 5x + 6 =$ ....

(ii) $4a^2 - 16 =$ ....

(iii) $4a^2 + 4ab +$ .... ایک کامل مربع ہے

(iv) $\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2} =$ ....

(v) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) =$ ....

(vi) $x^4 - 16$ کی تجزّی $=$ ....

(vii) اگر $(x - 2)$ کثیر رقمی $p(x) = x^2 + 2kx + 8$ کا جُزو ضربی ہو تو $k =$ ....

3۔ مندرجہ ذیل جملوں کی تجزّی کیجیے۔

(i) $x^2 + 8x + 16 - 4y^2$

(ii) $4x^2 - 16y^2$

(iii) $9x^2 + 27x + 8$

(iv) $1 - 64z^3$

(v) $8x^3 - \frac{1}{27y^3}$

(vi) $2y^2 + 5y - 3$

(vii) $x^3 + x^2 - 4x - 4$

(viii) $25m^2n^2 + 10mn + 1$

(ix) $1 - 12pq + 36p^2q^2$

خلاصہ

☆ اگر کسی کثیر رقمی جملے کو کچھ دوسرے کثیر رقمی جملوں کے حاصل ضرب کے طور پر لکھا جائے تو ان جملوں میں سے ہر ایک کو دیے گئے جملے کا جُزو ضربی کہتے ہیں۔

☆ کسی الجبری جملے کو اس کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں لکھنے کے عمل کو تجزّی کہتے ہیں۔
ہم نے مندرجہ ذیل قسم کے جملوں کی تجزّی کرنا سیکھا۔

- $ka + kb + kc$
- $ac + ad + bc + bd$
- $a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2$
- $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$

- $a^4 + a^2b^2 + b^4$ یا $a^4 + 4b^4$
- $x^2 + px + q$
- $ax^2 + bx + c$
- $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + d) + k$
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + k$
- $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + kx^2$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 \pm b^3$

☆ اگر کثیر رقمی جملے $p(x)$ کو $(x-a)$ پر تقسیم کیا جائے تو $p(a)$ بطور باقی حاصل ہوتا ہے۔

☆ اگر کسی کثیر رقمی $p(x)$ میں متغیر x کی جگہ کوئی خاص نمبر $x = a$ درج کرنے سے $p(a) = 0$ ہو جائے تو $x = a$ کو کثیر رقمی $p(x)$ کا زیرو کہتے ہیں۔

☆ اگر $p(a) = 0$ ہو تو $(x-a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزو ضربی ہوتا ہے۔ برعکس اس کے اگر $(x-a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزو ضربی ہو تو $p(a) = 0$ ہوگا۔

مسئلہ تجزی کی مدد سے تین درجی کثیر رقمی جملوں کی تجزی کی ہے۔

یونٹ 6

الجبری جملوں کا ذو اضعاف اقل، عادِ اعظم اور جذر المربع

(ALGEBRAIC MANIPULATION)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

6.1 بڑے سے بڑا مشترک جز وضربی اور چھوٹے سے چھوٹا مشترک حاصل ضربی

(Highest Common Factor and Least Common Multiple)

6.2 الجبری کسروں کے بنیادی عوامل (Basic Operations on Algebraic Fractions)

6.3 الجبری جملے کا جذر المربع (Square Root of Algebraic Expression)

یونٹ میں طلبا کے سیکھنے کے اہم وسیع تر ما حصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت تک نامکمل سمجھا جائے گا جب تک ہر طالب علم درج ذیل تصورات کو ہو بہو بیان کرنے پر علمی دسترس حاصل نہ کر لے۔

☆ دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا بڑے سے بڑا مشترک جُز وضربی یعنی عادِ اعظم (.H.C.F) اور چھوٹے سے چھوٹا مشترک حاصل ضربی یعنی ذو اضعاف اقل (.L.C.M) معلوم کرنا۔

☆ ذو اضعاف اقل اور عادِ اعظم کو بذریعہ تجزّی یا بذریعہ تقسیم معلوم کرنا۔

☆ ذو اضعاف اقل اور عادِ اعظم کے درمیان تعلق کو جاننا۔

☆ حقیقی عملی زندگی کے مسائل کو ذو اضعاف اقل اور عادِ اعظم سے مناسبت قائم کرنا اور ان کو حل کرنا۔

☆ عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل کی مدد سے کسری جملوں کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم کے عوامل کی مدد سے مختصر کرنا۔

☆ دیے ہوئے الجبری جملوں کا بذریعہ تجزی اور بذریعہ تقسیم جذر المربع معلوم کرنا۔

تعارف (Introduction)

اس یونٹ میں ہم پہلے الجبری جملوں کے عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی اور بذریعہ تقسیم معلوم کریں گے۔ اس کے بعد عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کی مدد سے کسری جملوں کا اختصار کرنا سیکھیں گے۔

یونٹ کے آخری حصہ میں ہم الجبری جملوں کے جذرالمربع کو معلوم کرنے کو زیرِ بحث بھی لائیں گے۔

6.1 الجبری جملوں کا عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل
(H.C.F. and L.C.M. of Algebraic Expressions)

6.1.1 (a) عادِ اعظم (H.C.F.)

اگر دو یا دو سے زیادہ الجبری جملے دیے گئے ہوں تو ان کے مشترک اجزائے ضربی کی بڑی سے بڑی قوت کو دیے ہوئے جملوں کا عادِ اعظم کہا جاتا ہے۔

(b) ذواضعاف اقل (L.C.M.)

ایک الجبری جملہ $p(x)$ اگر دیے ہوئے دو یا دو سے زیادہ جملوں سے پورا پورا تقسیم ہوتا ہو اور ان کے مشترک اور غیر مشترک اجزائے ضربی کا چھوٹے سے چھوٹا حاصل ضرب ہو تو $p(x)$ ان جملوں کا ذواضعاف اقل کہلاتا ہے۔

6.1.2 (a) عادِ اعظم (H.C.F.) معلوم کرنا۔

دیے ہوئے جملوں کا عادِ اعظم مندرجہ ذیل دو طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

(i) بذریعہ تجزی (ii) بذریعہ تقسیم

بعض دفعہ بذریعہ تجزی عادِ اعظم معلوم کرنا مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسی صورت میں عادِ اعظم کو تقسیم کے طریقہ سے حاصل کر لیتے ہیں۔ ان دونوں طریقوں کی ہم مثالوں کی مدد سے وضاحت کرتے ہیں۔

(i) عادِ اعظم بذریعہ تجزّی معلوم کرنا

مثال کثیر رقمی جملوں $x^2 - 4,\ x^2 + 4x + 4,\ 2x^2 + x - 6$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

حل جملوں کی تجزّی کرنے سے

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

$$2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x + 2) - 3(x + 2)$$
$$= (x + 2)(2x - 3)$$

پس بڑے سے بڑا مشترک جزو ضربی یعنی عادِ اعظم $x + 2$ ہے۔

(ii) **عادِاعظم بذریعہ تقسیم معلوم کرنا**

مثال کثیر رقمی $p(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ اور $q(x) = x^3 - 7x + 6$ کا بذریعہ تقسیم عادِاعظم معلوم کریں۔

حل

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ x^3 - 7x + 6 & x^3 - 7x^2 + 14x - 8 \\ & \pm x^3 \qquad \mp 7x \pm 6 \\ \hline & -7x^2 + 21x - 14 \end{array}$$

$$= -7(x^2 - 3x + 2)$$

باقی کثیر رقمی کا جُزوضربی 7- چونکہ دونوں کثیر رقمیوں میں مشترک نہیں اس لیے ہم 7- کو تقسیم کے عمل سے نظر انداز کر دیتے ہیں۔
چونکہ

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ x^2 - 3x + 2 & x^3 + 0x^2 - 7x + 6 \\ & \pm x^3 \mp 3x^2 \pm 2x \\ \hline & \quad 3x^2 - 9x + 6 \\ & \quad \pm 3x^2 \mp 9x \pm 6 \\ \hline & \qquad 0 \\ \hline \end{array}$$

پس $p(x)$ اور $q(x)$ کا عادِاعظم $x^2 - 3x + 2$ ہے۔

مشاہدہ کریں کہ

(i) بذریعہ تقسیم عادِاعظم معلوم کرنے کے دوران ضرورت پڑنے پر کسی بھی مناسب عدد سے ضرب دی جا سکتی ہے۔

(ii) اگر دی ہوئی کثیر رقمی کی تعداد تین ہو تو پہلے دو کا عادِاعظم معلوم کرنے کے بعد حاصل عادِاعظم اور تیسری کثیر رقمی کا عادِاعظم مطلوبہ عادِاعظم ہوگا۔

(b) **بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل معلوم کرنا**

دیے ہوئے الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کرنے کا عملی قانون

(i) دیے ہوئے جملوں کی سادہ ترین حد تک مکمل تجزّی کیجیے۔

(ii) ذواضعاف اقل چونکہ ہر جملہ کے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔ اس میں اجزائے ضربی کی قوت نمائی کا خیال رکھا جاتا ہے۔

مثال $p(x) = 12(x^3 - y^3)$ اور $q(x) = 8(x^3 - xy^2)$ کا ذواضعاف معلوم کیجیے۔

حل جملوں کی تجزی کی مدد سے ہم حاصل کرتے ہیں:

$$p(x) = 12(x^3 - y^3) = 2^2 \times 3 \times (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

اور

$$q(x) = 8(x^3 - xy^2) = 8x(x^2 - y^2)$$

$$= 2^3 x(x + y)(x - y)$$

پس $p(x)$ اور $q(x)$ کا ذواضعاف اقل

$$= 2^3 \times 3 \times x(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$= 24x(x + y)(x^3 - y^3)$$

6.1.3 عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان تعلق

مثال بذریعہ تجزّی $p(x) = 12(x^5 - x^4)$ اور $q(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$

(i) عادِ اعظم (ii) ذواضعاف اقل

معلوم کریں۔

حل پہلے ہم $p(x)$ اور $q(x)$ کی تجزّی کرتے ہیں۔ جیسا کہ

$$p(x) = 12(x^5 - x^4) = 12x^4(x - 1) = 2^2 \times 3 \times x^4(x - 1)$$

$$q(x) = 8(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 8x^2(x^2 - 3x + 2)$$

$$= 2^3 x^2(x - 1)(x - 2)$$

عادِ اعظم $= 2^2 x^2(x - 1) = 4x^2(x - 1)$

ذواضعاف اقل $= 2^3 \times 3 \times x^4(x - 1)(x - 2)$

مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$p(x)\, q(x) = 12x^4(x - 1) \times 8x^2(x - 1)(x - 2)$$

$$= 96x^6(x - 1)^2(x - 2) \quad ....(i)$$

اور

(ذواضعاف اقل)×(عادِ اعظم) $= [2^3 \times 3 \times x^4(x - 1)(x - 2)][4x^2(x - 1)]$

$$= [24x^4(x - 1)(x - 2)][4x^2(x - 1)]$$

$$= 96x^6(x - 1)^2(x - 2) \quad ....(ii)$$

(i) اور (ii) سے واضح ہوتا ہے کہ

$$p(x) \times q(x) = (\text{ذواضعاف اقل}) \times (\text{عادِ اعظم})$$

یعنی

اگر $p(x)$ اور $q(x)$ دو الجبری جملے ہوں اور ان کا عادِ اعظم یا ذواضعاف اقل معلوم ہو تو فارمولا کی مدد سے ذواضعاف اقل یا عادِ اعظم بھی معلوم کر لیتے ہیں۔

جیسا کہ

I $$\text{ذواضعاف اقل} = \frac{p(x) \times q(x)}{\text{عادِ اعظم}}$$

II $$\text{عادِ اعظم} = \frac{p(x) \times q(x)}{\text{ذواضعاف اقل}}$$

III $$p(x) = \frac{\text{ذواضعاف اقل} \times \text{عادِ اعظم}}{q(x)}$$

IV $$q(x) = \frac{\text{ذواضعاف اقل} \times \text{عادِ اعظم}}{p(x)}$$

نوٹ

ذواضعاف اقل اور عادِ اعظم الگ الگ ہوتے ہیں ماسوائے جزوِ ضربی (-1) ہو۔

مثال 1 دو کثیر رقمی $p(x) = 20(2x^3 + 3x^2 - 2x)$ اور $q(x) = 9(5x^4 + 40x)$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

فارمولا (I) کی مدد سے ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل $p(x)$ اور $q(x)$ کا تجزی کی مدد سے عادِ اعظم حاصل کرتے ہیں۔

$$p(x) = 20(2x^3 + 3x^2 - 2x) = 20x\,(2x^2 + 3x - 2)$$

$$= 20x(2x^2 + 4x - x - 2) = 20x[2x(x + 2) - (x + 2)]$$

$$= 20x\,(x + 2)\,(2x - 1) = 2^2 \times 5 \times x\,(x + 2)\,(2x - 1)$$

$$q(x) = 9(5x^4 + 40x) = 45x(x^3 + 8)$$

$$= 45x\,(x + 2)\,(x^2 - 2x + 4) = 5 \times 3^2 \times x\,(x + 2)\,(x^2 - 2x + 4)$$

پس $\text{عادِ اعظم} = 5x\,(x + 2)$

فارمولا I کی مدد سے

$$\text{ذو اضعاف اقل} = \frac{[20x\,(x+2)\,(2x-1)]\quad[45x\,(x+2)\,(x^2-2x+4)]}{5x\,(x+2)}$$

$$\text{ذو اضعاف اقل} = 4\times 5\times 9\times x\,(x+2)\,(2x-1)\,(x^2-2x+4)$$

$$= 180x\,(x+2)\,(2x-1)\,(x^2-2x+4)$$

مثال 2 $p(x) = 6x^3 - 7x^2 - 27x + 8$ اور $q(x) = 6x^3 + 17x^2 + 9x - 4$ کا ذو اضعاف اقل معلوم کیجیے۔

حل بذریعہ تقسیم پہلے ہم $p(x)$ اور $q(x)$ کا عادِ اعظم معلوم کرتے ہیں۔

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\
6x^3 - 7x^2 - 27x + 8 & 6x^3 + 17x^2 + 9x - 4 \\
 & \pm 6x^3 \mp 7x^2 \mp 27x \pm 8 \\
\hline
 & 24x^2 + 36x - 12 \\
 & = 12(2x^2 + 3x - 1)
\end{array}
$$

جزوِ ضربی 12 کو نظر انداز کرنے کے بعد کا عمل تقسیم

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 3x - 8 \\
2x^2 + 3x - 1 & 6x^3 - 7x^2 - 27x + 8 \\
 & \pm 6x^3 \pm 9x^2 \mp 3x \\
\hline
 & -16x^2 - 24x + 8 \\
 & \mp 16x^2 \mp 24x \pm 8 \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

پس $p(x)$ اور $q(x)$ کا عادِ اعظم $2x^2 + 3x - 1$ ہے۔

فارمولا (I) کی مدد سے

$$\text{ذو اضعاف اقل} = \frac{p(x)\times q(x)}{\text{عادِ اعظم}}$$

$$\text{ذواضعاف اقل} = \frac{(6x^3 - 7x^2 - 27x + 8)(6x^3 + 17x^2 + 9x - 4)}{2x^2 + 3x - 1}$$

$$= \frac{6x^3 - 7x^2 - 27x + 8}{2x^2 + 3x - 1} \times (6x^3 + 17x^2 + 9x - 4)$$

$$= (3x - 8)(6x^3 + 17x^2 + 9x - 4)$$

جو مطلوبہ ذواضعاف اقل ہے۔

6.1.4 عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کا استعمال

مثال دیے ہوئے دو اعداد کا مجموعہ 120 ہے اور ان کا عاد اعظم 12 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

حل فرض کیجیے دو اعداد $12x$ اور $12y$ ہیں (کیونکہ x اور y کا عادِ اعظم 1 ہے)

مثال کی شرائط کے مطابق

$$12x + 12y = 120$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 10$$

ایسے قدرتی اعداد کے جوڑے جن کا مجموعہ 10 ہے:

$(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$ ہیں۔

$(1, 9)$ اور $(3, 7)$ مطلوبہ اعداد کے جوڑے ہیں جن کا عادِ اعظم 1 ہے اور مثال کی شرائط پوری کرتے ہیں۔

پس مطلوبہ اعداد $1 \times 12,\ 9 \times 12;\ 3 \times 12,\ 7 \times 12$ ہیں۔

یعنی $12, 108$ اور $36, 84$

مشق 6.1

1۔ مندرجہ ذیل جملوں کا عادِ اعظم معلوم کیجیے۔

(i) $39x^7y^3z$, $91x^5y^6z^7$ (ii) $102xy^2z$, $85x^2yz$, $187xyz^2$

2۔ مندرجہ ذیل جملوں کا عادِ اعظم بذریعہ تجزّی معلوم کریں۔

(i) $x^2 + 5x + 6,\quad x^2 - 4x - 12$

(ii) $x^3 - 27,\quad x^2 + 6x - 27,\quad 2x^2 - 18$

(iii) $x^3 - 2x^2 + x, \quad x^2 + 2x - 3, \quad x^2 + 3x - 4$

(iv) $18(x^3 - 9x^2 + 8x), \quad 24(x^2 - 3x + 2)$

(v) $36(3x^4 + 5x^3 - 2x^2), \quad 54(27x^4 - x)$

3۔ مندرجہ ذیل کا بذریعہ تقسیم عادِاعظم معلوم کریں

(i) $x^3 + 3x^2 - 16x + 12 \quad , \quad x^3 + x^2 - 10x + 8$

(ii) $x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad , \quad 5x^3 + 3x^2 - 17x + 6$

(iii) $2x^5 - 4x^4 - 6x \quad , \quad x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2$

4۔ مندرجہ ذیل جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

(i) $39x^7y^3z \ , \ 91x^5y^6z^7$ (ii) $102xy^2z \ , 85x^2yz \ , \ 187xyz^2$

5۔ بذریعہ تجزی مندرجہ ذیل جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

(i) $x^2 - 25x + 100 \ , \ x^2 - x - 20$

(ii) $x^2 + 4x + 4, x^2 - 4, 2x^2 + x - 6$

(iii) $2(x^4 - y^4), 3(x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3)$

(iv) $4(x^4 - 1), 6(x^3 - x^2 - x + 1)$

6۔ k کی کس قیمت کے لیے $(x + 4)$ عادِاعظم ہے جملوں $x^2+x-(2k+2)$ اور $2x^2 + kx - 12$ کا؟

7۔ اگر $p(x) = (x + 3)\ (2x^2 - 3x + k)$ اور $q(x) = (x - 2)\ (3x^2 + 7x - l)$ کا عادِاعظم $(x - 2)$ $(x + 3)$ ہو تو k اور l کی قیمت معلوم کریں۔

8۔ اگر دو کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ کا ذواضعاف اقل $2(x^4 - 1)$ اور عادِاعظم $(x + 1)\ (x^2 + 1)$ ہو۔ اور $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ تو $q(x)$ معلوم کریں۔

9۔ اگر $p(x) = 10(x^2 - 9)\ (x^2 - 3x + 2)$ اور $q(x) = 10x(x + 3)\ (x - 1)^2$ اور ان کا عادِاعظم $10(x + 3)\ (x - 1)$ ہو تو ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

10۔ اگر دو کثیر رقمی کے عادِاعظم اور ذواضعاف اقل کا حاصل ضرب $(x + 5)\ (x - 2)\ (x + 3)^2$ ہو اور ایک کثیر رقمی $(x + 3)\ (x - 2)$ اور دوسری $x^2 + kx + 15$ ہو تو k کی قیمت معلوم کریں۔

11۔ وقاص کی خواہش ہے کہ 128 کیلے اور 176 چند بچوں میں سیب برابر برابر تقسیم کرے۔ بتائیے وقاص زیادہ سے زیادہ کتنے بچوں میں تقسیم کرسکتا ہے؟

6.2 الجبری کسور کے بنیادی عوامل (Basic Operations on Algebraic Fractions)

ہم اب الجبری کسور پر بنیادی عوامل جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کا عمل کریں گے۔ جو ہم مثالوں سے واضح کریں گے اور فرض کریں گے کہ تمام کسور با عمل ہیں۔

مثال 1 مندرجہ ذیل کا اختصار کیجیے۔

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

حل

$$\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

$$=\frac{x+3}{x^2-2x-x+2}+\frac{x+2}{x^2-3x-x+3}+\frac{x+1}{x^2-3x-2x+6}$$

$$=\frac{x+3}{x(x-2)-1(x-2)}+\frac{x+2}{x(x-3)-1(x-3)}+\frac{x+1}{x(x-3)-2(x-3)}$$

$$=\frac{x+3}{(x-2)\,(x-1)}+\frac{x+2}{(x-3)\,(x-1)}+\frac{x+1}{(x-3)\,(x-2)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-3)+(x+2)(x-2)+(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-9+x^2-4+x^2-1}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$$

$$=\frac{3x^2-14}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$$

مثال 2 $\frac{x^3-8}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}$ کو سادہ ترین الجبری جملہ میں مختصر کریں۔

حل مکمل تجزّی سے ہم حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{x^3-8}{x^2-4}\times\frac{x^2+6x+8}{x^2-2x+1}=\frac{(x-2)\,(x^2+2x+4)\times(x+2)\,(x+4)}{(x-2)\,(x+2)\times(x-1)^2}$$

شمار کنندہ کے اجزائے ضربی $(x-2)$, (x^2+2x+4), $(x+2)$ اور $(x+4)$ ہیں اور مخرج کے اجزائے ضربی $(x-2)$, $(x+2)$ اور $(x-1)^2$ ہیں۔ ان کا عادِ اعظم $(x-2)$ $(x+2)$ ہے۔

$$= \frac{(x^2+2x+4)(x+4)}{(x-1)^2}$$ (عادِ اعظم پر تقسیم کرنے سے)

مثال 3

$\frac{x^2+x+1}{x^2-9}$ کو $\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ پر تقسیم کریں اور سادہ ترین کسر میں ظاہر کریں۔

حل

$$\text{حاصل تقسیم} = \frac{x^2+x+1}{x^2-9} \div \frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)}{(x^2-9)} \times \frac{(x^2-4x+3)}{(x^3-1)}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)(x^2-x-3x+3)}{(x^2-9)(x^3-1)}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)(x-3)(x-1)}{(x+3)(x-3)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+3}$$

مطلوبہ اختصار ہے۔

مشق 6.2

مندرجہ ذیل کو ناطق جملوں میں مختصر کریں۔

1. $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

2. $\left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{4x}{x^2+1} + \frac{4x}{x^4-1}\right]$

3. $\frac{1}{x^2-8x+15} + \frac{1}{x^2-4x+3} - \frac{2}{x^2-6x+5}$

4. $\frac{(x+2)(x+3)}{x^2-9} + \frac{(x+2)(2x^2-32)}{(x-4)(x^2-x-6)}$

5. $\frac{x+3}{2x^2+9x+9} + \frac{1}{2(2x-3)} - \frac{4x}{4x^2-9}$

6. $A - \frac{1}{A}$, جب کہ $A = \frac{a+1}{a-1}$

7. $\left[\frac{x-1}{x-2} + \frac{2}{2-x}\right] - \left[\frac{x+1}{x+2} + \frac{4}{4-x^2}\right]$

8۔ کون سا ناطق جملہ $\frac{2x^2 + 2x - 7}{x^2 + x - 6}$ سے تفریق کرنے سے حاصل تفریق $\frac{x-1}{x-2}$ حاصل کرتے ہیں؟

ظاہر کیے گئے عوامل کے عمل کرنے سے سادہ ترین جملہ میں مختصر کیجیے۔

9. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6} \times \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

10. $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - 2x + 1}$

11. $\frac{x^4 - 8x}{2x^2 + 5x - 3} \times \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 4} \times \frac{x + 3}{x^2 - 2x}$

12. $\frac{2y^2 + 7y - 4}{3y^2 - 13y + 4} \div \frac{4y^2 - 1}{6y^2 + y - 1}$

13. $\left[\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right] \div \left[\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y}\right]$

6.3 الجبری جملوں کا جذر المربع (Square Root of Algebraic Expressions)

6.3.1 تعریف

نمبرز کے جذر المربع کی طرح ہم دیے ہوئے الجبری جملے $p(x)$ کے جذر المربع کی بھی تعریف کرتے ہیں کہ $p(x)$ ایک دوسرے جملہ $q(x)$ کا جذر المربع ہوگا اگر $q(x) \times q(x) = p(x)$

جیسا کہ اگر $5 \times 5 = 25$ ہو تو 25 کا جذر المربع 5 ہوتا ہے۔

یعنی کسی بھی ایسے الجبری جملہ $p(x)$ کا جذر المربع معلوم کر سکتے ہیں جو ایک مکمل مربع ہو یا مربع میں ظاہر کیا جا سکے۔

یونٹ کے اس حصہ میں الجبری جملوں کے جذر المربع معلوم کرنا سیکھیں گے۔

(i) بذریعہ تجزی

(ii) بذریعہ تقسیم

مثال 1 بذریعہ تجزّی الجبری جملے $4x^2 - 12x + 9$ کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

حل بذریعہ تجزّی

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x^2 - 6x - 6x + 9$$
$$= 2x(2x-3) - 3(2x-3)$$
$$= (2x-3)(2x-3)$$
$$= (2x-3)^2$$

پس $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \pm(2x-3)$

مثال 2 بذریعہ تجزّی الجبری جملے $x^2 + \frac{1}{x^2} + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 38$ کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔ جبکہ $x \neq 0$

حل

جملہ $x^2 + \frac{1}{x^2} + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 38$

نمبر 2 کو جمع اور تفریق کرنے سے $= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) + 36$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right)(6) + (6)^2$$

$= \left[\pm\left(x + \frac{1}{x} + 6\right)\right]^2;$ چونکہ $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

پس مطلوبہ جذرالمربع $\pm\left(x + \frac{1}{x} + 6\right)$ ہے۔

(ii) بذریعہ تقسیم

بعض حالات میں دیے ہوئے الجبری جملہ کو تجزّی کی مدد سے مکمل مربع میں تبدیل کرنا زیادہ مشکل ہو جاتا ہے۔ ایسے حالات میں دیے ہوئے جملہ کا جذرالمربع عام تقسیم کے طریقہ سے معلوم کر لیتے ہیں۔ تقسیم کا طریقہ وہی ہے جو ہم نمبرز کی صورت میں استعمال کرتے ہیں۔

نوٹ

تقسیم کے عمل سے پہلے ہم دیے ہوئے جملہ کو متغیر x کی قوت نما کو نزولی ترتیب میں تبدیل کر لیتے ہیں۔

مثال 1 الجبری جملہ $4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4$ کا جذر المربع بذریعہ تقسیم معلوم کیجیے۔

حل چونکہ دیا ہوا الجبری جملہ x کی مطلوبہ قوت نمائی ترتیب نزولی میں موجود ہے۔ اس لیے اس میں تبدیلی کی ضرورت نہیں۔

اب جملہ کی پہلی رقم کا جذر المربع حاصل کیا۔ یعنی $\sqrt{4x^4} = 2x^2$ سے تقسیم کا عمل شروع کیا تو پہلا حاصل قسمت بھی $2x^2$ ہی ہوگا۔ اگلے ہر قدم پر باقی تمام رقموں کو شامل کر کے اسی عمل کو دہراتے جانے سے مطلوبہ جذر المربع حاصل کر لیں گے:

یعنی

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline 2x^2 & 4x^4 + 12x^3 + x^2 - 12x + 4 \\ & \pm 4x^4 \\ \hline 4x^2 + 3x & 12x^3 + x^2 - 12x + 4 \\ & \pm 12x^3 \pm 9x^2 \\ \hline 4x^2 + 6x - 2 & -8x^2 - 12x + 4 \\ & \mp 8x^2 \mp 12x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس دیے ہوئے جملہ کا جذر المربع $\pm(2x^2 + 3x - 2)$ ہے۔

مثال 2 بذریعہ تقسیم الجبری جملہ $4\frac{x^2}{y^2} + 8\frac{x}{y} + 16 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}$ کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

حل چونکہ جملہ میں x کی قوت نمائی نزولی ترتیب میں ہے اور پہلی رقم کا جذر المربع $\sqrt{4\frac{x^2}{y^2}} = 2\frac{x}{y}$ ہے اس لیے عمومی تقسیمی طریقہ سے جذر المربع معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & 2\frac{x}{y} + 2 + 3\frac{y}{x} \\ \hline 2\frac{x}{y} & 4\frac{x^2}{y^2} + 8\frac{x}{y} + 16 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2} \\ & \pm 4\frac{x^2}{y^2} \\ \hline 4\frac{x}{y} + 2 & 8\frac{x}{y} + 16 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2} \\ & \pm 8\frac{x}{y} \pm 4 \\ \hline & 12 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2} \end{array}$$

$$4\frac{x}{y} + 4 + 3\frac{y}{x} \Big) \quad 12 + 12\frac{y}{x} + 9\frac{y^2}{x^2}$$

$$\pm 12 \pm 12\frac{y}{x} \pm 9\frac{y^2}{x^2}$$

$$0$$

پس دیے ہوئے جملہ کا جذرالمربع $\pm\left(2\frac{x}{y} + 2 + 3\frac{y}{x}\right)$ ہے۔

مثال 3 الجبری جملہ $x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 42x + 20$ کو مکمل مربع میں ظاہر کرنے کے لیے

(i) جملہ میں کیا جمع کیا جائے؟

(ii) جملہ میں سے کیا تفریق کیا جائے؟

(iii) x کی کس قیمت پر جملہ مکمل مربع ہوگا؟

حل بذریعہ تقسیم ہم معلوم کرتے ہیں کہ

$$x^2 - 5x + 4$$

$$x^2 \Big) \quad x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 42x + 20$$

$$\pm x^4$$

$$2x^2 - 5x \Big) \quad -10x^3 + 33x^2$$

$$\mp 10x^3 \pm 25x^2$$

$$2x^2 - 10x + 4 \Big) \quad 8x^2 - 42x + 20$$

$$-\ 8x^2 \mp 40x \pm 16$$

$$-\ 2x + 4$$

دیے ہوئے جملہ کو مکمل مربع بنانے کے لیے بقایا $(-2x + 4)$ صفر کے برابر ہونا چاہیے۔ اس لیے

(i) ہمیں جملہ میں $(2x - 4)$ جمع کرنا چاہیے۔

(ii) ہمیں جملہ میں سے $(-2x + 4)$ تفریق کرنا چاہیے۔

(iii) چونکہ دیے ہوئے جملہ کو مکمل مربع بنانے کے لیے $(-2x + 4)$ کو صفر کے برابر ہونا چاہیے۔ اس لیے

$$-2x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

مشق 6.3

1۔ بذریعہ تجزّی مندرجہ ذیل جملوں کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

(i) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(ii) $x^2 - 1 + \frac{1}{4x^2}, \quad (x \neq 0)$

(iii) $\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{12}xy + \frac{1}{36}y^2$

(iv) $4(a+b)^2 - 12(a^2 - b^2) + 9(a-b)^2$

(v) $\frac{4x^6 - 12x^3y^3 + 9y^6}{9x^4 + 24x^2y^2 + 16y^4}, \quad (x, y \neq 0)$

(vi) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right), \quad (x \neq 0)$

(vii) $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12, \quad (x \neq 0)$

(viii) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 5x + 6)$

(ix) $(x^2 + 8x + 7)(2x^2 - x - 3)(2x^2 + 11x - 21)$

2۔ بذریعہ تقسیم مندرجہ ذیل جملوں کا جذرالمربع معلوم کیجیے۔

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2 + 16x + 24y + 16$

(ii) $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$

(iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$

(iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$

(v) $\frac{x^2}{y^2} - 10\frac{x}{y} + 27 - 10\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}, \quad (x \neq 0, y \neq 0)$

3۔ k کی قیمت معلوم کریں جس سے مندرجہ ذیل جملوں کو مکمل مربع بنایا جا سکے۔

(i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 42x + k$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - kx + 9$

4۔ ℓ اور m مقداروں کی قیمت معلوم کیجیے جن سے مندرجہ ذیل جملے مکمل مربع بن سکیں۔

(i) $x^4 + 4x^3 + 16x^2 + \ell x + m$

(ii) $49x^4 - 70x^3 + 109x^2 + \ell x - m$

5۔ جملہ $9x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 13x + 12$ کو مکمل مربع بنانے کے لیے

(i) جملہ میں کیا جمع کرنا چاہیے؟

(ii) جملہ میں کیا تفریق کرنا چاہیے؟

(iii) x کی کیا قیمت ہوگی؟

اعادہ مشق 6

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) جملوں $p^3q - pq^3$ اور $p^5q^2 - p^2q^5$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $pq(p^2 - q^2)$ (b) $pq(p - q)$

(c) $p^2q^2(p - q)$ (d) $pq(p^3 - q^3)$

(ii) جملوں $5x^2y^2$ اور $20x^3y^3$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $5x^2y^2$ (b) $20x^3y^3$

(c) $100x^5y^5$ (d) $5xy$

(iii) جملوں $x - 2$ اور $x^2 + x - 6$ کا عادِ اعظم .. .. ہے۔

(a) $x^2 + x - 6$ (b) $x + 3$

(c) $x - 2$ (d) $x + 2$

(iv) $a^3 + b^3$ اور $a^2 - ab + b^2$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $a + b$ (b) $a^2 - ab + b^2$

(c) $(a - b)^2$ (d) $a^2 + b^2$

(v) $x^2 - 5x + 6$ اور $x^2 - x - 6$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $x - 3$ (b) $x + 2$

(c) $x^2 - 4$ (d) $x - 2$

(vi) $a^2 - b^2$ اور $a^3 - b^3$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $a - b$ (b) $a + b$

(c) $a^2 + ab + b^2$ (d) $a^2 - ab + b^2$

(vii) $x^2 + 3x + 2, x^2 + 4x + 3$ اور $x^2 + 5x + 4$ کا عادِ اعظم .... ہے۔

(a) $x + 1$ (b) $(x + 1)(x + 2)$

(c) $x + 3$ (d) $(x + 4)(x + 1)$

(viii) $45xy, 15x^2$ اور $30xyz$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(a) $90xyz$ (b) $90x^2yz$

(c) $15xyz$ (d) $15x^2yz$

(ix) $a^2 + b^2$ اور $a^4 - b^4$ کا ذواضعاف اقل .... ہے۔

(a) $a^2 + b^2$ (b) $a^2 - b^2$

(c) $a^4 - b^4$ (d) $a - b$

(x) دو جملوں کا حاصل ضرب، عادِ اعظم اور ذواضعاف اقل کے............... کے برابر ہے۔

(a) حاصل جمع (b) حاصل تفریق

(c) حاصل تقسیم (d) حاصل ضرب

(xi) جملہ $\frac{a}{9a^2 - b^2} + \frac{1}{3a - b}$ کا اختصار............... ہے۔

(a) $\frac{4a}{9a^2 - b^2}$ (b) $\frac{4a - b}{9a^2 - b^2}$

(c) $\frac{4a + b}{9a^2 - b^2}$ (d) $\frac{b}{9a^2 - b^2}$

(xii) $\frac{a^2 + 5a - 14}{a^2 - 3a - 18} \times \frac{a + 3}{a - 2}$ کا اختصار .... ہے۔

(a) $\frac{a + 7}{a - 6}$ (b) $\frac{a + 7}{a - 2}$

(c) $\frac{a + 3}{a - 6}$ (d) $\frac{a - 2}{a + 3}$

(xiii) $\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4} \div \frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$ کا اختصار .... ہے۔

(a) $\frac{1}{a+b}$ (b) $\frac{1}{a-b}$ (c) $\frac{a-b}{a^2+b^2}$ (d) $\frac{a+b}{a^2+b^2}$

(xiv) $\left(\frac{2x+y}{x+y}-1\right) \div \left(1-\frac{x}{x+y}\right)$ کا اختصار .... ہے۔

(a) $\frac{x}{x+y}$ (b) $\frac{y}{x+y}$ (c) $\frac{y}{x}$ (d) $\frac{x}{y}$

(xv) a^2-2a+1 کا جذرالمربع .... ہے۔

(a) $\pm(a+1)$ (b) $\pm(a-1)$ (c) $a-1$ (d) $a+1$

(xvi) جملہ x^4+64 میں کیا جمع کیا جائے کہ مکمل مربع بن جائے ....؟

(a) $8x^2$ (b) $-8x^2$ (c) $16x^2$ (d) $4x^2$

(xvii) $x^4+\frac{1}{x^4}+2$ کا جذرالمربع .... ہے۔

(a) $\pm\left(x+\frac{1}{x}\right)$ (b) $\pm\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ (c) $\pm\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (d) $\pm\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)$

2۔ بذریعہ تجزّی $8x^4-128$ اور $12x^3-96$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

3۔ بذریعہ تقسیم y^3+3y^2-3y-9 اور $y^3+3y^2-8y-24$ کا عادِ اعظم معلوم کریں۔

4۔ بذریعہ تجزّی $12x^2-75$, $6x^2-13x-5$ اور $4x^2-20x+25$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

5۔ اگر $x^4+3x^3+5x^2+26x+56$ اور $x^4+2x^3-4x^2-x+28$ کا عادِ اعظم x^2+5x+7 ہو تو جملوں کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

6۔ مندرجہ ذیل کو مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{3}{x^3+x^2+x+1}-\frac{3}{x^3-x^2+x-1}$

(ii) $\frac{a+b}{a^2-b^2} \div \frac{a^2-ab}{a^2-2ab+b^2}$

7- بذریعہ تجزّی $27 + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ کا جذرالمربع معلوم کریں، جبکہ $(x \neq 0)$

8- بذریعہ تقسیم $\frac{4x^2}{y^2} + \frac{20x}{y} + 13 - \frac{30y}{x} + \frac{9y^2}{x^2}$ کا جذرالمربع معلوم کریں، جبکہ $(x, y \neq 0)$

خلاصہ

☆ ہم نے دیے ہوئے دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کرنا بذریعہ تجزّی اور تقسیمی عمل سیکھ لیا ہے۔

☆ ہم نے دیے ہوئے دو الجبری کثیر رقمی $p(x)$ اور $q(x)$ کے عادِ اعظم اور ذو اضعاف اقل کے درمیان تعلق کا فارمولا۔

$p(x) \times q(x) =$ ذو اضعاف اقل × عادِ اعظم

قائم کیا اور اس کے استعمال سے ذو اضعاف اقل یا عادِ اعظم وغیرہ حاصل کر لیتے ہیں۔

☆ فارمولا میں کوئی تین اجزا معلوم ہوں تو نا معلوم کو نیچے دی گئی مساوات کی مدد سے حاصل کرنا سیکھا ہے۔

$p(x) \times q(x) =$ ذو اضعاف اقل × عادِ اعظم

☆ عادِ اعظم اور ذو اضعاف کے استعمال سے کسری جملوں کا مختصر کرنا سیکھا ہے۔

جن میں بنیادی عوامل $+$، $-$، $\times$ اور $\div$ مستعمل ہوں۔

☆ دیے ہوئے الجبری جملوں کے جذرالمربع بذریعہ تجزّی اور تقسیمی طریقے سے معلوم کرنا سیکھا ہے۔

یونٹ 7

یک درجی مساواتیں اور غیر مساواتیں

(LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

7.1 یک درجی مساواتیں (Linear Equations)

7.2 مطلق قیمت کی مساواتیں (Equations Involving Absolute Value)

7.3 یک درجی غیر مساواتیں (Linear Inequalities)

7.4 یک درجی غیر مساواتوں کو حل کرنا (Solving Linear Inequalities)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ایک متغیر میں یک درجی مساوات کا اعادہ کر سکیں۔

☆ ایسی یک درجی مساوات کو حل کر سکیں جس میں متغیر کے عددی سر ناطق اعداد ہوں۔

☆ جذری مساواتوں کو یک درجی شکل میں تبدیل کر کے حل کر سکیں۔

☆ کسی حقیقی عدد x کی مطلق قیمت $|x|$ کی تعریف بیان کر سکیں۔

☆ ایک متغیر میں مطلق قیمت کی مساوات کو حل کر سکیں۔

☆ ایسی غیر مساواتوں کی تعریف کر سکیں جن میں علامات $(<, >)$ اور $(\leq, \geq)$ استعمال کی گئی ہوں۔

☆ غیر مساواتوں کی درج ذیل خصوصیات کو سمجھ اور ان کی شناخت کر سکیں:

ثلاثی خاصیت، خاصیت متعدیت، جمعی خاصیت، ضربی خاصیت

☆ ایسی یک درجی غیر مساواتوں کو حل کر سکیں جن میں متغیر کے عددی سر ناطق اعداد ہوں۔

تعارف (Introduction)

اس یونٹ میں ہم پچھلی جماعتوں میں حاصل کردہ علم میں مزید اضافہ کرنے کے لیے ایسی مساواتوں کو حل کریں گے جن میں کوئی متغیر ناطق عددی سروں کا یا جذری علامت کا یا مطلق قیمت کا ہو۔ پھر غیر مساواتوں کی تعریف بیان کرنے کے بعد ان کی ثلاثی، متعدیت، جمعی اور ضربی خصوصیات کا اعادہ کریں گے۔ آخر میں ان خصوصیات کی مدد سے غیر مساواتوں کو حل کریں گے۔

7.1 یک درجی مساواتیں

ایک متغیر x میں یک درجی مساوات کی معیاری شکل درج ذیل ہے:

$ax + b = 0$ ، جبکہ $a, b \in \mathrm{R}$ اور $a \neq 0$

یک درجی مساوات کا حل سیٹ متغیر x کی وہ حقیقی قیمت ہوگی جو x کی جگہ درج کرنے سے مساوات کو درست ثابت کردے۔ دو ایسی مساواتیں جن کے حل سیٹ یکساں ہوں مترادف مساواتیں کہلاتی ہیں۔

7.1.2 ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنا

کسی مساوات کا حل معلوم کرنے کے لیے اس کو مترادف مساوات میں تحویل کرنے کا عمل اس میں موجود متغیر x کی قیمت معلوم ہو جانے تک جاری رہتا ہے۔

حل کرنے کا طریق کار

ایک متغیر میں یک درجی مساوات کو حل کرنے کے طریق کار کا خلاصہ درج ذیل ہے:

- ☆ اگر مساوات میں کسریں موجود ہوں تو مخرجوں کے ذو اضعاف اقل سے ضرب دے کر کسور کے مخرجوں کو ختم کر دیتے ہیں۔
- ☆ قوسین کو ختم کرنے کے لیے ضرب کی خاصیت تقسیمی بلحاظ جمع استعمال کرتے ہیں۔
- ☆ طرفین میں موجود ایک جیسی (یکساں درجے والی) رقوم کو اکٹھا کر لیتے ہیں۔
- ☆ برابری کی جمعی خاصیت (طرفین میں ایک ہی رقم جمع یا تفریق کرنے سے مساوات میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی) کی مدد سے متغیر کو مساوات کے بائیں طرف اور مستقل مقداروں کو دوسری طرف اکٹھا کر کے مختصر کر لیتے ہیں۔
- ☆ برابری کی ضربی خاصیت کی مدد سے متغیر کو علیحدہ کر لیا جاتا ہے۔
- ☆ جواب کے طور پر حاصل ہونے والی متغیر کی قیمت کو دی گئی مساوات میں متغیر کی جگہ درج کر کے پڑتال کر لیتے ہیں کہ جواب درست ہے یا نہیں۔

مثال 1 مندرجہ ذیل مساوات کو حل کریں

$$\frac{3x}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{25}{6}$$

حل کسور کے مخرجوں کو خارج کرنے کے لیے دی گئی مساوات کی دونوں اطراف کو 2، 3 اور 6 کے ذواضعاف اقل 6 سے ضرب دینے سے

$$9x - 2(x-2) = 25$$
$$\Rightarrow 9x - 2x + 4 = 25$$
$$\Rightarrow 7x = 21$$
$$\Rightarrow x = 3$$

پڑتال دی گئی مساوات میں $x = 3$ درج کرنے سے

$$\frac{3}{2}(3) - \frac{3-2}{3} = \frac{25}{6}$$
$$\frac{9}{2} - \frac{1}{3} = \frac{25}{6}$$
$$\frac{25}{6} = \frac{25}{6}$$

جو کہ درست نتیجہ ہے

چونکہ $x = 3$ رکھنے سے دی گئی مساوات درست فقرہ بنتی ہے، اس لیے حاصل کردہ اصل صحیح ہے۔

نوٹ

کسری مساوات کے حل میں ایسی اصل (root) کے حاصل ہونے کا امکان بھی ہوتا ہے جو دی گئی مساوات کو درست ثابت نہ کرے۔ یعنی حل سیٹ خالی سیٹ ہو۔

مثال 2 درج ذیل مساوات کو حل کیجیے۔

$$\frac{3}{y-1} - 2 = \frac{3y}{y-1}, \quad y \neq 1$$

حل

طرفین کو ذواضعاف اقل $y - 1$ سے ضرب دینے سے

$$3 - 2(y-1) = 3y$$
$$\Rightarrow 3 - 2y + 2 = 3y$$
$$\Rightarrow -5y = -5$$
$$\Rightarrow y = 1$$

پڑتال دی گئی مساوات میں $y = 1$ درج کرنے سے

$$\frac{3}{1-1} - 2 = \frac{3(1)}{1-1}$$
$$\frac{3}{0} - 2 = \frac{3}{0}$$

لیکن $\frac{3}{0}$ مبہم صورت ہے، اس لیے $y = 1$ اصل نہیں ہو سکتی۔

لہٰذا دی گئی مساوات کی کوئی اصل موجود نہیں۔ یعنی حل سیٹ { } ہے۔

مثال 3 درج ذیل مساوات کو حل کیجیے۔

$$\frac{3x-1}{3} - \frac{2x}{x-1} = x, \quad x \neq 1$$

حل اس مفروضے کے تحت کہ $x - 1 \neq 0$ یعنی $x \neq 1$، طرفین کو $3(x - 1)$ سے ضرب دینے سے

$$(x-1)(3x-1) - 6x = 3x(x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 - 6x = 3x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow -10x + 1 = -3x$$

$$\Rightarrow -7x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

پڑتال $x = \frac{1}{7}$ رکھنے سے دی گئی مساوات ایک درست فقرہ ثابت ہوتی ہے۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ شرط $x \neq 1$ کا مساوات کے حل پر کوئی اثر نہیں ہے۔ کیونکہ $\frac{1}{7} \neq 1$

لہٰذا ہمارا حل $x = \frac{1}{7}$ درست ہے۔

7.1.3 جذری مساواتیں جن کو یک درجی مساواتوں میں تبدیل کیا جا سکے

تعریف

ایسی مساوات جس میں کوئی جذری علامت میں متغیر ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

کسی جذری مساوات کو حل کرنے کے لیے ہم طرفین کا وہ قوت نما لیتے ہیں جو جذری علامت کو خارج کر دے۔ مساوات کی دو میں سے ہر ایک طرف کی کوئی خاص قوت لینے سے ایسی غیر مترادف مساوات بھی حاصل ہو سکتی ہے جس کے اصل (roots) دی گئی مساوات سے زیادہ ہوں۔ ایسے اصل، اضافی اصل (extraneous roots) کہلاتے ہیں۔ جذری مساوات کو حل کرنے کے بعد یہ ضروری ہے کہ ہم جواب کی پڑتال کریں کہ حاصل کردہ اصل کہیں اضافی اصل تو نہیں۔

نوٹ

یہاں ایک اہم اور قابلِ غور نقطہ یہ ہے کہ دی گئی مساوات کی دو میں سے ہر ایک طرف کی طاق قوت نما لینے سے ہمیشہ ایک مترادف مساوات حاصل ہوگی۔ جبکہ جفت قوت نما لینے سے ایسا ہونا ضروری نہیں۔

مثال 1 درج ذیل مساواتوں کو حل کیجیے۔

(a) $\sqrt{2x-3}-7=0$ (b) $\sqrt[3]{3x+5}=\sqrt[3]{x-1}$

حل

(a) جذری علامت والے جملہ کو علیحدہ کرنے کے لیے مساوات کو دوبارہ لکھنے سے

$$\sqrt{2x-3}=7$$

$$\Rightarrow \quad 2x-3=49 \quad \text{..........}$$ (طرفین کا مربع لینے سے)

$$\Rightarrow \quad 2x=52 \Rightarrow x=26$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x = 26$ درج کرنے سے

$$\sqrt{2(26)-3}-7=0$$

$$\sqrt{52-3}-7=0$$

$$\sqrt{49}-7=0$$

$$0=0$$

لہٰذا حل سیٹ $\{26\}$ ہے

(b)

$$\sqrt[3]{3x+5}=\sqrt[3]{x-1} \quad \text{............}$$ (معلوم)

$$\Rightarrow \quad 3x+5=x-1 \quad \text{...........}$$ (طرفین کا مکعب لینے سے)

$$\Rightarrow \quad 2x=-6 \Rightarrow x=-3$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x = -3$ درج کرنے سے

$$\sqrt[3]{3(-3)+5}=\sqrt[3]{-3-1} \Rightarrow \sqrt[3]{-4}=\sqrt[3]{-4}$$

پس دی گئی مساوات $x = -3$ رکھنے سے درست ثابت ہوتی ہے۔

یہاں $\sqrt[3]{-4}$ ایک حقیقی عدد ہے۔ کیونکہ ہم نے مساوات کی دو میں سے ہر ایک طرف کی طاق قوت نما لی۔

لہٰذا دی گئی مساوات کا حل سیٹ $\{-3\}$ ہے۔

مثال 2 مندرجہ ذیل مساوات کا حل سیٹ معلوم کریں اور پڑتال بھی کریں۔

$$\sqrt{5x-7}-\sqrt{x+10}=0$$

حل

جب کسی جذری مساوات کی دو رقوم کے مجذور میں متغیر موجود ہو تو ان دونوں رقوم کو طرفین میں علیحدہ علیحدہ (یعنی ایک رقم کو مساوات کی ایک طرف اور دوسری رقم کو دوسری طرف) لکھ لیتے ہیں۔ اس طرح مساوات کو حل کرنا آسان ہو جاتا ہے۔ اس لیے مساوات کو دوبارہ لکھنے سے

$$\sqrt{5x-7}=\sqrt{x+10}$$

$$5x-7=x+10, \quad \text{............ (طرفین کا مربع لینے سے)}$$

$$4x=17 \Rightarrow x=\frac{17}{4}$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x=\frac{17}{4}$ درج کرنے سے

$$\sqrt{5x-7}-\sqrt{x+10}=0$$

$$\sqrt{5\left(\frac{17}{4}\right)-7}-\sqrt{\frac{17}{4}+10}=0$$

$$\sqrt{\frac{57}{4}}-\sqrt{\frac{57}{4}}=0$$

$$0=0$$

یعنی $x=\frac{17}{4}$ درج کرنے سے دی گئی مساوات درست فقرہ ثابت ہوتی ہے۔

پس $\left\{\frac{17}{4}\right\}$ = حل سیٹ

مثال 3 مندرجہ ذیل مساوات کا حل سیٹ معلوم کریں اور پڑتال بھی کریں۔

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$$

حل

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13}$$

طرفین کا مربع لینے سے

$$x+7+x+2+2\sqrt{(x+7)(x+2)}=6x+13$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{x^2+9x+14}=4x+4$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+9x+14}=2x+2$$

طرفین کا دوبارہ مربع لینے سے

$$x^2 + 9x + 14 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x(x-2) + 5(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-2)(3x+5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2, -\frac{5}{3}$$

پڑتال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x = 2$ درج کرنے سے دی گئی مساوات درست ثابت ہوتی ہے۔ جبکہ $x = -\frac{5}{3}$ درج کرنے سے مساوات درست ثابت نہیں ہوتی۔

لہٰذا حل سیٹ $\{2\}$ ہے اور $x = -\frac{5}{3}$ اضافی اصل ہے۔

مشق 7.1

1۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کا حل سیٹ معلوم کریں۔

(i) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = x + \frac{1}{6}$

(ii) $\frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{2} = -1$

(iii) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 3x\right)$

(iv) $x + \frac{1}{3} = 2\left(x - \frac{2}{3}\right) - 6x$

(v) $\frac{5(x-3)}{6} - x = 1 - \frac{x}{9}$

(vi) $\frac{x}{3x-6} = 2 - \frac{2x}{x-2}, \; x \neq 2$

(vii) $\frac{2x}{2x+5} = \frac{2}{3} - \frac{5}{4x+10}, \; x \neq -\frac{5}{2}$

(viii) $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{x-1}, \; x \neq 1$

(ix) $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1}, \; x \neq \pm 1$

(x) $\frac{2}{3x+6} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2x+4}, \; x \neq -2$

2۔ درج ذیل ہر مساوات کو حل کریں اور اضافی اصل کی پڑتال بھی کریں۔

(i) $\sqrt{3x+4} = 2$

(ii) $\sqrt[3]{2x-4} - 2 = 0$

(iii) $\sqrt{x-3} - 7 = 0$

(iv) $2\sqrt{t+4} = 5$

(v) $\sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{x-2}$ (vi) $\sqrt[3]{2-t} = \sqrt[3]{2t-28}$

(vii) $\sqrt{2t+6} - \sqrt{2t-5} = 0$ (viii) $\sqrt{\dfrac{x+1}{2x+5}} = 2, x \neq -\dfrac{5}{2}$

7.2 مطلق قیمت میں مساوات

یک درجی مساوات کی ایک اور قسم متغیر کی مطلق قیمت میں مساوات ہے۔ایسی مساواتوں کو حل کرنے سے پہلے مطلق قیمت کی تعریف درج ذیل ہے:

7.2.1 تعریف

کسی حقیقی عدد 'a' کی مطلق قیمت کو $|a|$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کی تعریف درج ذیل ہے

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{اگر } a \geq 0 \\ -a, & \text{اگر } a < 0 \end{cases}$$

مثال کے طور پر

$|6| = 6$ ، $|0| = 0$ اور $|-6| = -(-6) = 6$

مطلق قیمت کی کچھ خصوصیات

اگر $a, b \in R$ تو

(i) $|a| \geq 0$ (ii) $|-a| = |a|$

(iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$ (iv) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

7.2.2 مطلق قیمت میں یک درجی مساوات کا حل معلوم کرنا

مطلق قیمت کی تعریف کو مدنظر رکھتے ہوئے ہم فوری طور پر کہہ سکتے ہیں کہ

$|x| = 3$ مترادف ہے $x = 3$ یا $x = -3$

کیونکہ $x = +3$ یا $x = -3$ رکھنے سے بیان $|x| = 3$ درست ثابت ہوتا ہے۔

ایسی مساوات جس میں مطلق قیمت کا کوئی متغیر ہو، کو حل کرنے کے لیے اسے مترادف مرکب فقرے کے طور پر لکھ لیتے ہیں۔ جس کے دونوں حصوں کو علیحدہ علیحدہ حل کر لیا جاتا ہے۔

مثال 1 $|2x + 3| = 11$ کا حل سیٹ معلوم کریں اور پڑتال بھی کریں۔

حل

اس بات پر انحصار کرتے ہوئے کہ $(2x + 3)$ مثبت ہے یا منفی، مطلق قیمت کی تعریف کی رو سے دی گئی مساوات درج ذیل کے مترادف ہوگی:

$+(2x + 3) = 11$ یا $-(2x + 3) = 11$

عام طور پر ان دونوں مساوات کو یوں لکھا جاتا ہے:

$$2x+3=-11 \quad \text{یا} \quad 2x+3=+11$$
$$2x=-14 \quad \text{یا} \quad 2x=8$$
$$x=-7 \quad \text{یا} \quad x=4$$

پڑتال

دی گئی مساوات میں $x = 4$ درج کرنے سے

$$|2(4)+3| = 11$$

جو ہمیشہ درست ہے $\quad 11 = 11$

اب $x = -7$ درج کرنے سے

$$|2(-7)+3| = 11$$
$$|-11| = 11$$

جو کہ درست نتیجہ ہے $\quad 11 = 11$

لہٰذا $x = 4, -7$ دی گئی مساوات کے اصل ہیں۔

پس حل سیٹ $\{-7, 4\}$ ہے۔

نوٹ

اگر مساوات $3|x-1|-6=8$ طرز کی ہو تو مطلق قیمت والے جملے کو ایک طرف علیحدہ کر کے مترادف مساواتیں لکھی جاتی ہیں۔ زیر بحث مساوات کو حل کرنا ہو تو پہلے $|x-1|=\frac{14}{3}$ کی شکل میں لکھ لینا چاہیے۔

مثال 2 $\quad |8x-3|=|4x+5|$ کا حل سیٹ معلوم کریں۔

حل

چونکہ یکساں مطلق قیمت کے دو اعداد برابر ہوتے ہیں یا ان کی علامت میں فرق (+ یا − کا) ہوتا ہے۔ اس لیے دی گئی مساوات درج ذیل مساواتوں کے مترادف ہوگی:

$$8x-3=-(4x+5) \quad \text{یا} \quad 8x-3=4x+5$$
$$12x=-2 \quad \text{یا} \quad 4x=8$$
$$x=-\frac{1}{6} \quad \text{یا} \quad x=2$$

پڑتال کرنے سے ہمیں معلوم ہو جاتا ہے کہ $x=2, x=-\frac{1}{6}$ دونوں قیمتیں دی گئی مساوات کو درست ثابت کرتی ہیں۔

لہٰذا $\left\{ -\frac{1}{6}, 2 \right\}$ = حل سیٹ

بعض اوقات یہ بھی ممکن ہے کہ حاصل کی گئی اصل دی گئی مساوات کو درست ثابت نہ کرے۔ اس صورت میں ایسے اضافی اصل کو رد کر دیا جاتا ہے۔ چنانچہ مناسب یہی ہوگا کہ حل سیٹ لکھنے سے پہلے پڑتال کر لی جائے۔

مثال 3 $|3x + 10| = 5x + 6$ کو حل کریں

حل دی گئی مساوات درج ذیل مساواتوں کے مترادف ہے:

$$\pm(3x + 10) = 5x + 6$$

$$\Rightarrow \quad 3x + 10 = 5x + 6 \quad \text{یا} \quad 3x + 10 = -(5x + 6)$$

$$-2x = -4 \quad \text{یا} \quad 8x = -16$$

$$x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -2$$

دی گئی مساوات میں $x = -2$ رکھنے سے وہ درست ثابت نہیں ہوتی۔

لہٰذا صرف $x = 2$ ہی مطلوبہ اصل ہے۔

مشق 7.2

1۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست یا غلط کی شناخت کریں۔

(i) $|x| = 0$ کے حل سیٹ میں صرف ایک ہی رکن ہے۔ ....

(ii) مطلق قیمت کی تمام مساواتوں کے دو اصل ہوتے ہیں۔ ....

(iii) مساوات $|x| = 2$ مترادف ہے $x = -2$ یا $x = 2$ کے۔ ....

(iv) مساوات $|x - 4| = -4$ کا حل سیٹ خالی سیٹ ہے۔ ....

(v) مساوات $|2x - 3| = 5$ مترادف ہے $2x - 3 = 5$ یا $2x + 3 = 5$ کے۔ ....

2۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کریں۔

(i) $|3x - 5| = 4$

(ii) $\frac{1}{2}|3x + 2| - 4 = 11$

(iii) $|2x + 5| = 11$

(iv) $|3 + 2x| = |6x - 7|$

(v) $|x + 2| - 3 = 5 - |x + 2|$

(vi) $\frac{1}{2}|x + 3| + 21 = 9$

(vii) $\left|\frac{3 - 5x}{4}\right| - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(viii) $\left|\frac{x + 5}{2 - x}\right| = 6$

7.3 یک درجی غیر مساواتیں

یونٹ 2 میں ہم نے حقیقی اعداد کا موازنہ کرنے کی ایک اہم خاصیت پر روشنی ڈالی تھی۔ نا برابری کا تعلق $a \neq b$ ہمیں حقیقی اعداد a اور b کا موازنہ کرنے اور اس بات کا تعین کرنے میں مدد دیتا ہے کہ کوئی بھی عدد کسی دوسرے عدد سے یا تو چھوٹا یا بڑا ہے۔ اعداد کا یہ تقابل روزمرہ زندگی کے بہت سے معاملات میں بنیادی اہمیت اور حیثیت رکھتا ہے۔ اس کے ذریعے ہم قیمت، بلندی، وزن، درجہ حرارت، فاصلہ، مشینی پیداوار کی لاگت اور وقت وغیرہ کا موازنہ کر سکتے ہیں۔ غیر مساوات کی علامات $>$ اور $<$ کو سب سے پہلے ایک انگریز ریاضی دان تھامس ہیریئٹ (Thomas Harriot , 1560-1621) نے متعارف کروایا تھا۔

7.3.1 غیر مساوات کی تعریف

فرض کریں 'a' اور 'b' حقیقی اعداد ہیں۔ اگر ان کا فرق $a - b$ مثبت ہو تو 'a' عدد 'b' سے بڑا ہوگا۔ اس کو ہم غیر مساوات $a > b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس غیر مساوات کو $b < a$ سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ جس کا مطلب ہے کہ 'b' عدد 'a' سے چھوٹا ہے۔

اسی طرح اگر $a - b$ منفی ہو تو a, b سے چھوٹا ہے اور اس کو $a < b$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ کبھی کبھار ایسی صورتحال بھی سامنے آتی ہے کہ ایک عدد دوسرے عدد سے چھوٹا یا اس کے برابر ہوتا ہے۔ لیکن ہمیں صحیح صورت حال کا اِدراک نہیں ہوتا۔ ایسی صورت میں ہم علامت $\leq$ کا استعمال کرتے ہیں۔ جس کو یوں پڑھا جائے گا "چھوٹا ہے یا برابر ہے" یعنہٖ $\geq$ کو پڑھا جائے گا "بڑا ہے یا برابر ہے"۔ علامات $<$, $>$, $\leq$ اور $\geq$ کو غیر مساواتی نشان بھی کہا جاتا ہے۔ غیر مساواتوں $x > y$ اور $x < y$ کو مضبوط جبکہ $x \geq y$ اور $x \leq y$ کو کمزور غیر مساواتیں کہا جاتا ہے۔

اگر ہم غیر مساواتوں کے جوڑے $a < b$ اور $b < c$ کو اکٹھا کر کے ایک مربوط اور ٹھوس شکل '$a < b < c$' میں لکھیں تو اس کا مطلب یہ ہے کہ "a, b اور c کے درمیان کہیں واقع ہے" یعنہٖ "$a \leq b \leq c$" کو یوں پڑھا جائے گا۔ "a, b اور c کے درمیان واقع ہے بشمول a اور c کے۔"

ایک متغیر x میں یک درجی غیر مساوات کی معیاری شکل مندرجہ ذیل ہے:

$$ax + b < 0, \quad a \neq 0; \quad a, b \in \mathrm{R}$$

ہم علامت '$<$'، کو $>$، $\leq$ یا $\geq$ سے بھی بدل سکتے ہیں۔

7.3.2 غیر مساواتوں کی خصوصیات

ایک متغیر میں یک درجی غیر مساواتوں کو حل کرنے کے لیے جن خصوصیات کو ہم استعمال کریں گے، وہ درج ذیل ہیں۔

1۔ ثلاثی خاصیت

اگر $a, b \in R$ تو درج ذیل بیانات میں سے ایک اور صرف ایک درست ہوتا ہے۔

$$a < b \quad \text{یا} \quad a = b \quad \text{یا} \quad a > b$$

اس خاصیت کا ایک خاص اہم نتیجہ $b = 0$ کے لیے ہے۔ یعنی کسی حقیقی عدد 'a' کے لیے

$$a < 0 \quad \text{یا} \quad a = 0 \quad \text{یا} \quad a > 0$$

2۔ خاصیت متعدیت

فرض کریں $a, b, c \in R$

(i) $a > b$ اور $b > c \Rightarrow a > c$

(ii) $a < b$ اور $b < c \Rightarrow a < c$

3۔ جمعی خاصیت

$a, b, c \in R$ کے لیے

(i) $a > 0$ اور $b > 0 \Rightarrow a + b > 0$ (خاصیت بندش بلحاظ جمع)

(ii) $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

$a < b \Rightarrow a + c < b + c$

4۔ ضربی خاصیت

فرض کریں $a, b, c, d \in R$

(i) $a > 0$ اور $b > 0 \Rightarrow ab > 0$

جبکہ $a < 0$ اور $b < 0 \Rightarrow ab > 0$

(ii) $a > b$ اور $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

یا $a < b$ اور $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

(iii) $a > b$ اور $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

یا $a < b$ اور $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

مندرجہ بالا خاصیت (iii) یہ ظاہر کرتی ہے کہ منفی حقیقی عدد سے کسی غیر مساوات کی طرفین کو ضرب دینے سے غیر مساوات کا نشان برعکس ہو جاتا ہے (یعنی اس کا رخ مخالف سمت میں تبدیل ہو جاتا ہے):

(iv) $a > b$ اور $c > d \Rightarrow ac > bd$

7.4 ایک متغیر میں غیر مساواتوں کا حل معلوم کرنا

ایک متغیر میں الجبری غیر مساوات کو حل کرنے کے طریقہ کی وضاحت مندرجہ ذیل مثالوں سے کی گئی ہے:

مثال 1

$9-7x>19-2x$, ($x \in R$ جبکہ) کا حل سیٹ معلوم کریں۔

حل

$9-7x>19-2x$

$9-5x>19$ (طرفین میں $2x$ جمع کرنے سے)

$-5x>10$

$x<-2$ (طرفین کو $-\frac{1}{5}$ سے ضرب دینے سے)

لہٰذا $\{x \mid x<-2\}$ = حل سیٹ

مثال 2

($x \in R$ جبکہ) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3} \leq x+\frac{1}{3}$ کو حل کریں۔

حل

$$\frac{1}{2}x-\frac{2}{3} \leq x+\frac{1}{3}$$

طرفین کو 6 سے یعنی کسور کے مخرجوں 2 اور 3 کے ذواضعاف اقل سے ضرب دینے سے

$$6\left[\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right] \leq 6\left[x+\frac{1}{3}\right]$$

یا $3x-4 \leq 6x+2$

یا $3x \leq 6x+6$

یا $-3x \leq 6$

یا $x \geq -2$

لہٰذا $\{x \mid x \geq -2\}$ = حل سیٹ

مثال 3 درج ذیل مرکب غیر مساوات کو حل کریں۔

$$-2 < \frac{1-2x}{3} < 1 \quad \text{جبکہ} \quad x \in R$$

حل

دی گئی غیر مساوات دو ایسے حصوں پر مشتمل ہے جو لفظ 'اور' کی شرط سے مربوط ہیں۔ حل سیٹ ان دونوں کے حل سیٹوں کا تقاطع ہوگا۔

$$-2 < \frac{1-2x}{3} \quad \text{اور} \quad \frac{1-2x}{3} < 1$$

(مگر ہم اس مثال میں غیر مساوات کو اس کی دی گئی شکل میں ہی حل کریں گے جو کہ نسبتاً آسان ہے)

دی گئی غیر مساوات $-2 < \frac{1-2x}{3} < 1$

یا $-6 < 1-2x < 3$

یا $-7 < -2x < 2$

یا $\frac{7}{2} > x > -1$

یا $-1 < x < 3.5$

پس حل سیٹ $\{x \mid -1 < x < 3.5\}$ ہے۔

مثال 4

$4x - 1 \leq 3 \leq 7 + 2x$ کو حل کریں۔ (جبکہ $x \in R$)

حل

دی گئی غیر مساوات برقرار رہے گی اگر اس کے دونوں حصے $4x - 1 \leq 3$ اور $3 \leq 7 + 2x$ مربوط رہیں۔

اب ہم ان دونوں حصوں کو علیحدہ علیحدہ حل کرتے ہیں۔

پہلے حصے کی غیر مساوات سے $4x - 1 \leq 3$

$\Rightarrow 4x \leq 4$ یعنی $x \leq 1$ .... (i)

دوسرے حصے کی غیر مساوات سے $3 \leq 7 + 2x \Rightarrow -4 \leq 2x$

یا $-2 \leq x \Rightarrow x \geq -2$ .... (ii)

نتائج (i) اور (ii) کا تقاطع سیٹ $-2 \leq x \leq 1$ ہے۔

پس حل سیٹ $= \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$

مشق 7.3

1۔ مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $3x + 1 < 5x - 4$ (ii) $4x - 10.3 \le 21x - 1.8$

(iii) $4 - \frac{1}{2}x \ge -7 + \frac{1}{4}x$ (iv) $x - 2(5 - 2x) \ge 6x - 3\frac{1}{2}$

(v) $\frac{3x + 2}{9} - \frac{2x + 1}{3} > -1$ (vi) $3(2x + 1) - 2(2x + 5) < 5(3x - 2)$

(vii) $3(x - 1) - (x - 2) > -2(x + 4)$ (viii) $2\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}(5x - 4) > -\frac{1}{3}(8x + 7)$

2۔ مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $-4 < 3x + 5 < 8$ (ii) $-5 \le \frac{4 - 3x}{2} < 1$

(iii) $-6 < \frac{x - 2}{4} < 6$ (iv) $3 \ge \frac{7 - x}{2} \ge 1$

(v) $3x - 10 \le 5 < x + 3$ (vi) $-3 \le \frac{x - 4}{-5} < 4$

(vii) $1 - 2x < 5 - x \le 25 - 6x$ (viii) $3x - 2 < 2x + 1 < 4x + 17$

اعادہ مشق 7

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) درج ذیل میں سے کون سا عدد غیر مساوات $3 - 4x \le 11$ کا حل ہوگا؟ ....

(a) -8 (b) -2 (c) $-\frac{14}{4}$ (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(ii) کوئی بیان جس میں $<, >, \le$ یا $\ge$ میں سے کوئی ایک علامت پائی جائے .... کہلاتی ہے۔

(a) مساوات (b) ایسی مساوات جو متغیر کی ہر قیمت کے لیے درست ہو

(c) غیر مساوات (d) یک درجی مساوات

(iii) .... = x غیر مساوات $-2 < x < \frac{3}{2}$ کے حل سیٹ کا ایک رکن ہے۔

(a) -5 (b) 3 (c) 0 (d) $\frac{3}{2}$

(iv) اگر x کی قیمت 10 سے بڑی نہ ہو تو ....

(a) $x \geq 8$ (b) $x \leq 10$ (c) $x < 10$ (d) $x > 10$

(v) ایک لفٹ کی بوجھ اٹھانے کی استعداد 'c' زیادہ سے زیادہ 1600 پاؤنڈ ہو تو ....

(a) $c < 1600$ (b) $c \geq 1600$ (c) $c \leq 1600$ (d) $c > 1600$

(vi) $x = 0$ غیر مساوات .... کے حل سیٹ کا رکن ہے۔

(a) $x > 0$ (b) $3x + 5 < 0$

(c) $x + 2 < 0$ (d) $x - 2 < 0$

2۔ درج ذیل بیانات کی شناخت کریں کہ درست ہیں یا غلط۔

(i) مساوات $3x - 5 = 7 - x$ یک درجی مساوات ہے............۔

(ii) مساوات $x - 0.3x = 0.7x$ متغیر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے............۔

(iii) مساوات $-2x + 3 = 8$ مساوات $-2x = 11$ کے مترادف ہے............۔

(iv) مساوات میں کسور ہوں تو مخرج کو ختم کرنے کے لیے ہم مساوات کی دونوں اطراف کو مخرجوں کے ذواضعاف اقل سے ضرب دیتے ہیں............۔

(v) $4(x + 3) = x + 3$ مشروط مساوات ہے............۔

(vi) متغیر کی کوئی بھی قیمت، مساوات $2(3x + 5) = 6x + 12$ کو درست ثابت نہیں کرتی............۔

(vii) $\frac{2}{3}x = 12$ کو حل کرنے کے لیے طرفین کو $\frac{2}{3}$ سے ضرب دینی چاہیے............۔

(viii) برابر حل سیٹ والی مساواتوں کو مترادف مساواتیں کہتے ہیں............۔

(ix) ایسا حل جو دی گئی مساوات کو درست ثابت نہ کرے فالتو اصل کہلاتا ہے............۔

3۔ درج ذیل مختصر سوالات کے جواب تحریر کریں۔

(i) ایک متغیر میں یک درجی مساوات کی تعریف کریں۔

(ii) غیر مساوات کی ثلاثی خاصیت اور خاصیت متعدیت بیان کریں۔

(iii) حرارت کی پیائش کرنے کے لیے F ڈگری فارن ہائیٹ اور C ڈگری سینٹی گریڈ کے درمیان تعلق کو ظاہر کرنے کے لیے کلیہ درج ذیل ہے۔

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

C کی کس قیمت کے لیے $F < 0$ ہوگا؟

(iv) کسی صحیح عدد اور 12 کے مجموعہ کا 7 گنا کم از کم 50 اور زیادہ سے زیادہ 60 ہے۔ اس تعلق کو ظاہر کرنے والی غیر مساوات لکھیں اور اسے حل کریں۔

4۔ مندرجہ ذیل مساواتوں میں سے ہر ایک کو حل کریں اور پڑتال بھی کریں۔

(i) $\sqrt{2t+4} = \sqrt{t-1}$ (ii) $\sqrt{3x-1} - 2\sqrt{8-2x} = 0$

5۔ درج ذیل مساواتوں کے حل سیٹ معلوم کریں۔

(i) $|3x+14| - 2 = 5x$ (ii) $\frac{1}{3}|x-3| = \frac{1}{2}|x+2|$

6۔ مندرجہ ذیل غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $-\frac{1}{3}x + 5 \leq 1$ (ii) $-3 < \frac{1-2x}{5} < 1$

خلاصہ

☆ ایک متغیر x میں یک درجی مساوات $ax + b = 0$ ہے۔ جبکہ $a, b \in R$ اور $a \neq 0$

☆ یک درجی مساوات کا حل متغیر x کی وہ قیمت ہوتی ہے جو x کی جگہ درج کرنے سے مساوات کو درست ثابت کرے۔

☆ ایسی مساوات جس کا حل سیٹ ϕ ہو، نا قابلِ حل مساوات کہلاتی ہے۔

☆ برابری کی جمعی خاصیت: $\forall\, a, b, c \in R \quad a = b \Rightarrow a + c = b + c$

اور $a - c = b - c$

☆ برابری کی ضربی خاصیت: $a = b \Rightarrow ac = bc$

☆ تنسیخی خاصیت: $\forall\, a, b, c \in R \quad a + c = b + c \Rightarrow a = b$

$ac = bc, c \neq 0 \Rightarrow a = b,$

☆ مساوات کا حل معلوم کرنے کے لیے اس کو مترادف مساوات میں تحویل کرنے کا عمل اس میں موجود متغیر کی قیمت معلوم کرنے تک جاری رہتا ہے۔

☆ ایسی مساوات جس میں کوئی جذری علامت میں متغیر ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔ اضافی اصل کے حوالے سے ایسی مساوات کی جانچ پڑتال ضروری ہوتی ہے۔

☆ کسی حقیقی عدد 'a' کی مطلق قیمت کی تعریف:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{جبکہ} \quad a \geq 0 \\ -a, & \text{جبکہ} \quad a < 0 \end{cases}$$

☆ مطلق قیمت کے خواص

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ تو

(i) $|a| \geq 0$

(ii) $|-a| = |a|$

(iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(iv) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

(v) $|x| = a$ مترادف ہے $x = a$ یا $x = -a$

☆ غیر مساوات کی علامات: $<, >, \leq, \geq$

☆ ایک متغیر x میں یک درجی غیر مساوات: $ax + b < 0, \quad a \neq 0$

☆ غیر مساوات کی خصوصیات:

(a) ثلاثی خاصیت

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ تو $a > b$ یا $a = b$ یا $a < b$

(b) خاصیت متعدیت

$a > b$ اور $b > c \Rightarrow a > c$

(c) ضربی خاصیت

(i) $a > b, c > 0, \Rightarrow \quad ac > bc$ اور $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(ii) $a > b, c < 0, \Rightarrow \quad ac < bc$ اور $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

یونٹ 8

خطی یالائن (لینئر) گراف اور اس کے مستعملات

(LINEAR GRAPH AND ITS APPLICATIONS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

8.1 تعارف (Introduction)

8.2 کارتیسی مستوی (Cartesian Plane)

8.3 گراف میں باہم معکوس تبدیلی (Conversion Graphs)

8.4 دو متغیراتی خطی (لینئر) مساواتوں کا گرافیکل حل
(Graphical Solution of Linear Equations in Two Variables)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

یونٹ کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت تک نامکمل سمجھا جائے گا جب تک ہر طالب علم درج ذیل تصورات کو ہو بہو بیان کرنے پر علمی دسترس حاصل نہ کر لے:

☆ دو حقیقی نمبرز x اور y کے جوڑے (x , y) کی بطور مترتب جوڑا (ordered pair) کی پہچان کر سکے۔

☆ مثالوں کی مدد سے مترتب جوڑوں کی باہم شناخت کر سکے۔

☆ دو باہم عمودی خطوط میں سے ایک افقی اور دوسرا راسی مشترک نقطہ O سے گزرنے کی مدد سے کارتیسی (cartesian) یا مستطیلی (rectangular) مستوی کی تعریف کر سکے۔

☆ کارتیسی نظام (system) کو ظاہر کرتے ہوئے ذہن نشین کر سکے:

(i) افقی خط کو x- ایکسز $(x$ - axis$)$ یا x- محور سے ظاہر کرنا

(ii) راسی خط کو y- ایکسز $(y$ - axis$)$ یا y- محور سے ظاہر کرنا

(iii) مشترک نقطہ O کو مبدا (origin) کے حوالہ سے سمجھنا

☆ مترتب جوڑے (a, b) کی مناسبت سے مستوی میں نقطہ $P(a, b)$ کی نشاندہی کرنا جس میں

(i) حقیقی نمبر a کی نقطہ $P(a, b)$ میں x-محدد (abscissa) یا x-کوآرڈینیٹ (x-coordinate) سے پہچان کرنا۔

(ii) حقیقی نمبر b کو نقطہ $P(a, b)$ میں y-محدد (ordinate) یا y-کوآرڈینیٹ (y-coordinate) سے یاد رکھنا۔

☆ کارتیسی مستوی میں نقاط کی مدد سے جیومیٹری کی مختلف اشکال مثلاً قطعہ خط (line-segment)، تکون یا مثلث (triangle) اور مستطیل (rectangle) کی تشکیل کرنا۔

☆ دیے ہوئے خط مستقیم یا اس کی مساوات (equation) کی مدد سے اس پر نقاط کے x-محور اور y-محور کا جدول تیار کرنا جو مساوات کا حل سیٹ ہوں۔

☆ حل سیٹ کے مترتب جوڑوں کے نقاط کو مستوی میں ظاہر کرنا۔

☆ تشکیل کے لیے مناسب یونٹ انتخاب کرنا تا کہ ذرائع کے مطابق مساوات کا گراف حاصل ہو سکے۔

☆ مندرجہ ذیل مساواتوں کی اقسام کے گراف کی تشکیل دینا:

- $y = c$ ، c ایک مخصوص حقیقی نمبر ہو
- $x = a$ ، a ایک مخصوص حقیقی نمبر ہو
- $y = mx$ ، m ایک مخصوص حقیقی نمبر ہو
- $y = mx + c$ ، m اور c دونوں مستقل حقیقی نمبر ہوں

☆ جدول میں دیے ہوئے مترتب جوڑوں کی مدد سے گراف تشکیل دینا۔

☆ عملی زندگی سے وابستہ مسائل کو حل کرنے کا شعور حاصل کرنا۔

☆ دی ہوئی دو متغیراتی مساوات میں x اور y کی قیمتوں میں ڈائریکٹ تناسب کے اعتبار سے باہم تبدیلی کی وضاحت کرنا۔

☆ گراف کی مدد سے دیے ہوئے x سے y یا دیے ہوئے y سے x کا باہم مطالعہ کرنا۔

☆ دو متغیرات x اور y کی مساوات کے حل سیٹ کی مدد سے مندرجہ ذیل کی مساوات اور گراف بنانا اور ان گراف کو معکوس کنورشن گراف (conversion graph) میں بدلنا اور مطالعہ کرنا۔

- میل اور کلومیٹر کے درمیان

- ایکڑ اور ہیکٹر کے درمیان
- سیلسیس اور فارن ہائیٹ ڈگری کے درمیان
- پاکستانی کرنسی اور کوئی دوسری کرنسی وغیرہ کے درمیان

☆ دو متغیرات x اور y میں دو خطی لینئر مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کرنا۔

8.1 کارتیسی مستوی اور خطی یا لینئر گراف

8.1.1 حقیقی نمبرز کا ایک مترتب جوڑا

دو حقیقی نمبرز x اور y کا ایک جوڑا (x, y) مترتب جوڑا کہلاتا ہے۔ جس میں اس کے ارکان x اور y کو ایک مقررہ خاص ترتیب یا اصول کے مطابق درج کیا گیا ہو۔

مثلاً (x, y) ایک ایسا مترتب جوڑا ہے جس میں پہلا رکن x اور دوسرا رکن y ہے۔ اگر $x \neq y$ ہو تو $(x, y) \neq (y, x)$ پس $(2, 3)$ اور $(3, 2)$ دونوں ایک دوسرے سے مختلف مترتب جوڑے ہیں۔

اگر $(x, y) = (m, n)$ ہو تو $x = m$ اور $y = n$ ہونا ضروری ہوگا۔

8.1.2 مترتب جوڑے کی شناخت

ایک کلاس روم میں ایک طالب علم کی سیٹ ایک مترتب جوڑے کی واضح مثال ہے۔ اگر طالب علم A کلاس میں طلبہ کی تیسری لائن کی پانچویں نشست پر بیٹھا ہے تو اس کی نشست ایک مترتب جوڑے $(3, 5)$ کو ظاہر کرتی ہے۔ جس میں 3 اس لائن کا تعددی نمبر ہے اور 5 اس لائن میں سیٹ نمبر کو ظاہر کرتا ہے۔

اسی طرح مترتب جوڑا $(4, 3)$ ایسی سیٹ کی نشاندہی کرتا ہے جس پر طالب علم B کی کمرہ امتحان میں چوتھی قطار اور تیسرے کالم یا چوتھی قطار کی تیسری نشست کی طرف راہنمائی کرتا ہے۔

8.1.3 کارتیسی مستوی (Cartesian Plane)

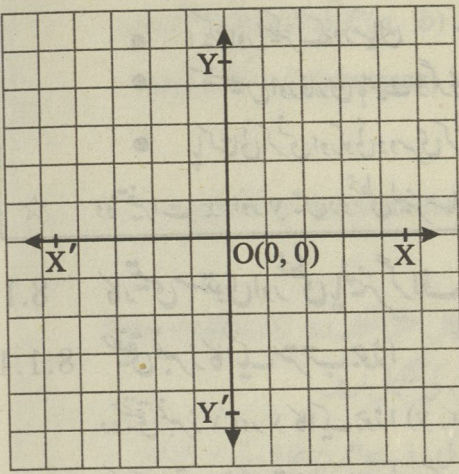
کارتیسی مستوی ایک ایسی مستوی ہے جو سیٹ $R \times R = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$ کے مترتب جوڑوں اور کارتیسی مستوی کے نقاط کے درمیان $(1-1)$ کا تعلق قائم رکھتی ہے۔

مستوی میں دو باہم عمودی خطوط مستقیم کھینچے جاتے ہیں جن کو کوارڈینیٹ محور کہا جاتا ہے۔ نقطہ $O(0, 0)$ کو مستوی کا مبدا (origin) کہتے ہیں جہاں دونوں باہم عمودی خطوط مستقیم ملتے ہیں۔

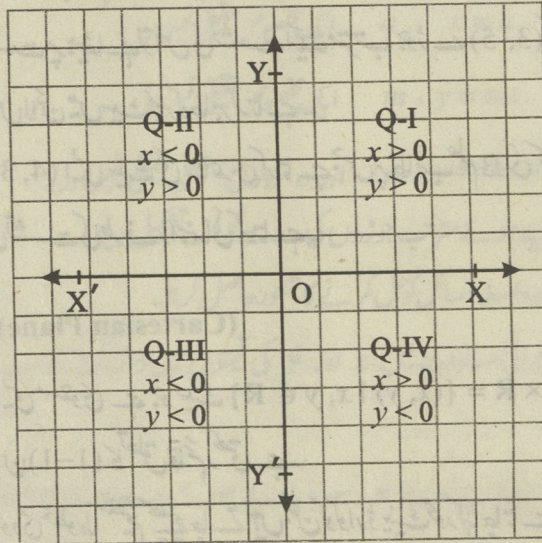
کارتیسی مستوی کو 'کوارڈینیٹ (coordinate) مستوی بھی کہتے ہیں۔ کارتیسی مستوی میں نقاط کے محددات x اور y کو نقاط کے کوارڈینیٹ اسی لیے کہا جاتا ہے۔

8.1.4 مبدا اور کوآرڈینیٹ محور کی نشاندہی

اُفقی خط مستقیم XOX′ کو x- محور اور عمودی خطِ مستقیم YOY′ کو y- محور کہا جاتا ہے۔

نقطہ O جہاں دونوں x- محور اور y- محور باہم ملتے ہیں مبدا کہلاتا ہے اور اسے نقطہ O(0, 0) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

یہ بات عیاں ہے کہ مستوی کا ہر نقطہ x- محور یا y- محور پر ہوتا ہے یا دیے ہوئے مستوی کے چار ربع (quadrants) XOY ، YOX′ ، X′OY′ اور Y′OX میں سے کسی ایک ربع میں ہوتا ہے۔ جن کو بالترتیب پہلا ربع، دوسرا ربع، تیسرا ربع اور چوتھا ربع کہتے ہیں۔

دونوں کوآرڈینیٹ محور مستوی کو چار ربع میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان کو بالترتیب Q-I، Q-II، Q-III اور Q-IV سے ظاہر کرتے ہیں۔

نقاط (x, y) کے کوآرڈینیٹ کی ربع سکیم کو نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے

مثلاً

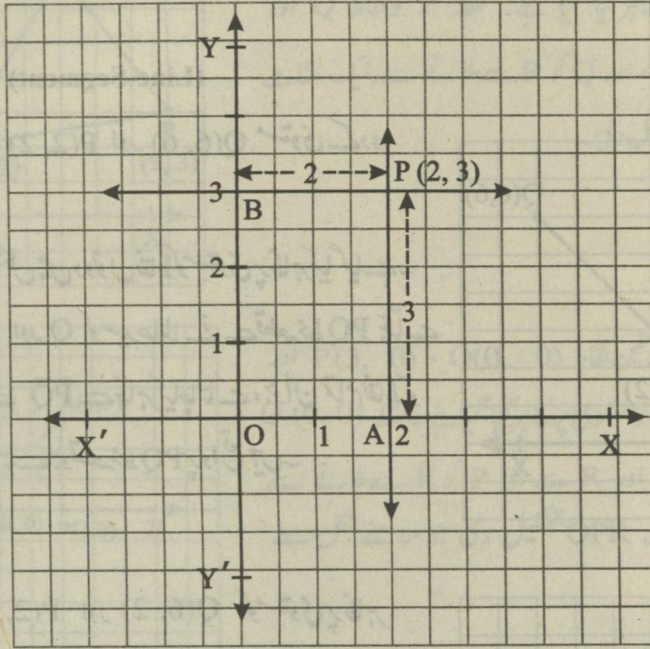
1۔ نقطہ (–3, –1) تیسرے ربع Q-III میں واقع ہے۔

2۔ نقطہ (2, –3) چوتھے ربع Q-IV میں واقع ہے۔

3۔ نقطہ (2, 5) پہلے ربع Q-I میں واقع ہے۔

4۔ نقطہ (2, 0) x- محور یا x- ایکسز پر واقع ہے۔

8.1.5 مترتب جوڑا (a, b) کا مستوی میں مطابقتی نقطہ $P(a, b)$ کو معلوم کرنا

فرض کیا (a, b)، سیٹ $R \times R$ کا ایک مترتب جوڑا ہے۔

اوپر کے حوالہ سسٹم (reference system) میں حقیقی نمبر a کو x- محور پر مبدا O سے a=OA اکائیاں OX کی سمت ناپا (اگر $a > 0$) ہو اور حقیقی نمبر b کو y- محور پر مبدا O سے b=OB اکائیاں OY کی سمت ناپا (اگر $b>0$) ہو- B سے x- محور کے متوازی ایک خط مستقیم کھینچا۔ اسی طرح A سے y- محور کے متوازی ایک خط مستقیم کھینچا۔ دونوں خطوط ایک دوسرے کو نقطہ P پر مل گئے۔ P وہ نقطہ ہے جو مترتب جوڑے (a, b) کا مستوی میں مطابقتی نقطہ $P(a, b)$ ہے۔

اوپر گراف میں $x = 2$ اور $y = 3$ لیا گیا ہے جس سے مترتب جوڑے $(2, 3)$ کا مطابقتی نقطہ $P(2, 3)$ ہے۔

اسی طرح سے کسی بھی مترتب جوڑے کا نقطہ اور مستوی میں اس کے کوآرڈینیٹ معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

نقطہ $P(x, y)$ میں x- کوآرڈینیٹ کو ایبسیسا (abscissa) کہا جاتا ہے اور y- کوآرڈینیٹ کو (ordinate) مانا جاتا ہے۔

1۔ مستوی کے ہر نقطہ P کی شناخت اس کے مترتب جوڑے (x, y) کے محددات x اور y سے ہوتی ہے اور اسے $P(x, y)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

2۔ مستوی کے وہ نقاط جن میں $y = 0$، تمام x- محور پر ہیں۔ یعنی $P(-2, 0)$ x- محور پر ہے۔

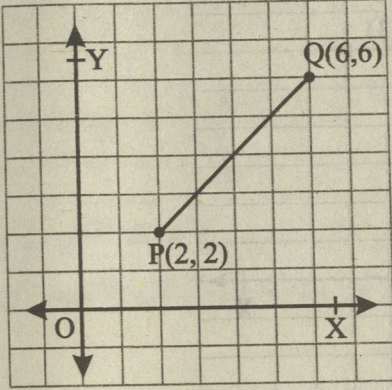
3۔ مستوی کے تمام وہ نقاط جن میں $x = 0$ ہو، y- محور پر ہوں گے۔ جیسے نقطہ $Q(0, 3)$ y- محور پر ہے۔

8.1.6 کارتیسی مستوی میں جیومیٹری کی مختلف اشکال کی تشکیل

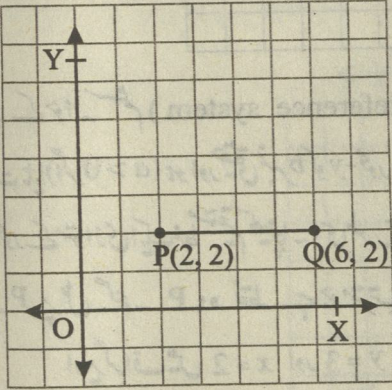
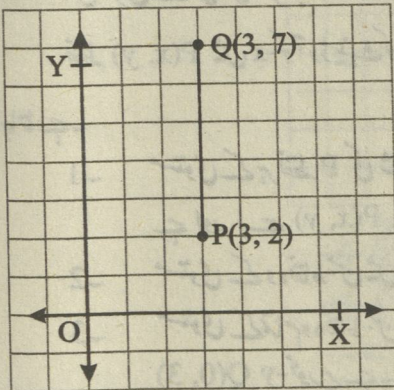
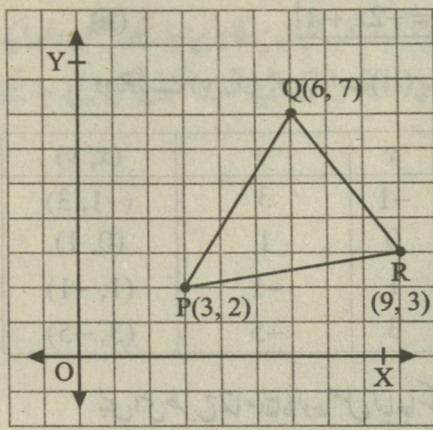
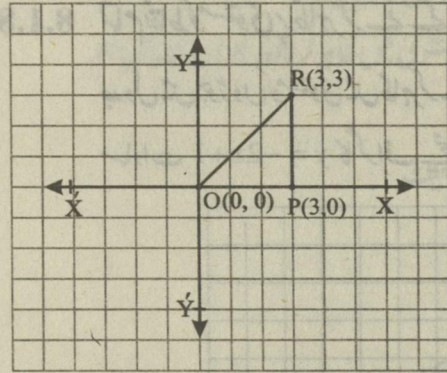
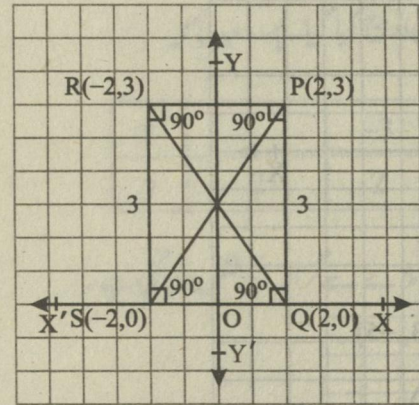
جیومیٹری کی کسی بھی شکل کی تشکیل سے پہلے ہم نقاط کے ایک ہی خط کے ہم خط ہونے کا خیال اور تعریف یا وضاحت

کریں گے۔

(a) قطعہ خط (Line-Segment)

مثال 1 فرض کیجیے کہ P(2, 2) اور Q(6, 6) مستوی کے دو نقاط ہیں۔

1۔ سامنے شکل میں دونوں نقاط کو مستوی پر ظاہر کیا گیا ہے۔

2۔ نقاط P اور Q کو سیدھا ملانے سے قطعہ خط PQ بنتا ہے اور اسے $\overline{PQ}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو اُن تمام نقاط کو ظاہر کرتا ہے جو قطعہ خط PQ پر واقع ہیں۔

مثال 2 دو نقاط P(2, 2) اور Q(6, 2) کو مستوی پر ظاہر کیا گیا۔ P اور Q کو باہم ملانے سے ہم نے قطعہ خط PQ حاصل کیا جو کہ x-محور کے متوازی قطعہ خط ہے، کیونکہ P اور Q دونوں نقاط کے y -کوآرڈینیٹ برابر ہیں۔

مثال 3 دو نقاط P(3, 2) اور Q(3, 7) کو مستوی پر ظاہر کیا۔ دونوں نقاط P اور Q کو باہم ملانے سے قطعہ خط PQ کو y- محور کے متوازی حاصل کیا۔ سامنے شکل میں دونوں نقاط کے x- کوآرڈینیٹ (coordinates) برابر ہیں۔

(b) مثلث (Triangle)

مثال 1 تین نقاط P(3, 2) ، Q(6, 7) اور R(9, 3) کو مستوی پر ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ P کو نقاط Q اور R سے ملانے اور Q کو R سے ملانے سے ایک مثلث PQR تشکیل دی۔

مثال 2 دیے ہوئے تین نقاط O(0, 0) ، P(3, 0) اور R(3, 3) کو مستوی پر ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ O (0, 0) کو نقاط P اور R سے اور P کو R سے ملانے سے ایک مثلث OPR تشکیل دی جو سامنے شکل سے ظاہر ہے۔

(c) مستطیل (Rectangle)

مثال 1 دیے ہوئے چار نقاط P(2, 3) ، Q(2, 0) اور R(−2, 3) اور S(−2, 0) کو مستوی پر ظاہر کیا۔ نقطہ P کو Q اور R سے ملانے، نقاط Q اور R کو نقطہ S سے ملانے پر ایک مستطیل PQSR حاصل ہوتی ہے۔ 2(مربع کے ضلع کی لمبائی) = y یونٹ

8.1.7 دو متغیراتی لینئر مساوات کے جوڑوں کے محددات کا جدول (Construction of Table for Pair of Values Satisfying a Linear Equation in two Variables)

دی ہوئی مساوات اگر،

$$2x + y = 1 \quad \text{ہو} \qquad \text{(i)}$$

تو مرتب جوڑے جو مساوات (i) پر واقع ہیں کو حاصل کرنے کے لیے مساوات (i) کو درج ذیل مساوات (ii) میں تبدیل کرنا ہوگا۔

$$\boxed{y = -2x + 1} \qquad \text{(ii)}$$

وہ جوڑے (x, y) جو مساوات (ii) پر ہیں نیچے جدول میں درج کیے جاتے ہیں:

x	y	(x, y)
-1	3	$(-1, 3)$
0	1	$(0, 1)$
1	-1	$(1, -1)$
3	-5	$(3, -5)$

اگر $x = -1$ ہو تو، $y = (-2)(-1) + 1 = 2 + 1 = 3$ ہے۔

اگر $x = 0$ ہو تو، $y = (-2)(0) + 1 = 0 + 1 = 1$ ہے۔

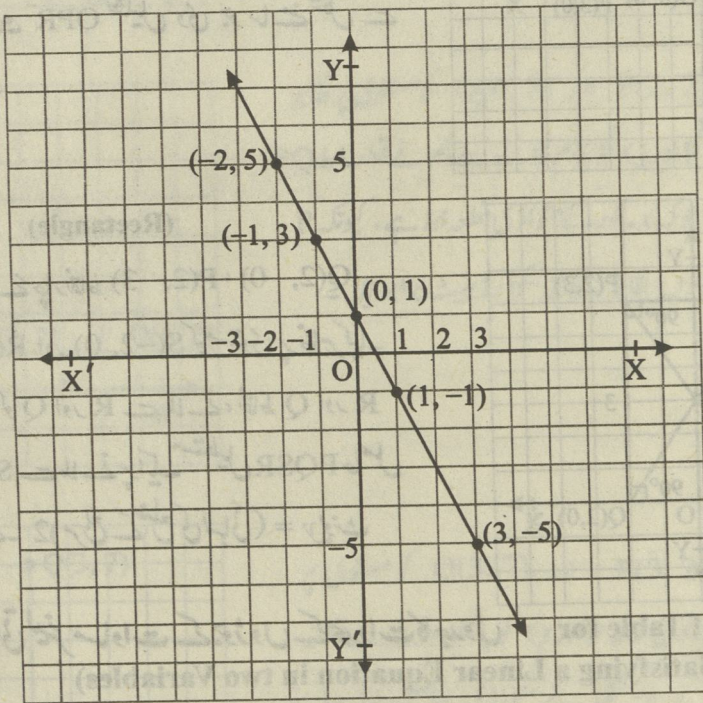
اگر $x = 1$ ہو تو، $y = (-2)(1) + 1 = -2 + 1 = -1$ ہے۔

اگر $x = 3$ ہو تو، $y = -6 + 1 = -5$ ہے۔

پس اسی طرح تمام نقاط کو حاصل کیا جاسکتا ہے جو مساوات (i) پر واقع ہیں۔

8.1.8 تمام نقاط کو مستوی پر ظاہر کرنے کے بعد گراف حاصل کرنا

جدول میں جوڑوں کو مستوی میں ظاہر کر کے ان کو باہم ملانے سے ہم دی ہوئی مساوات کا گراف حاصل کرتے ہیں۔

مساوات $y = -2x + 1$ کا گراف نیچے شکل میں دکھایا گیا ہے۔

8.1.9 گراف کی سکیل

ضرورت پڑنے پر مساوات کے سکیل کو اپنی آسانی کے مطابق لیا جاسکتا ہے مثلاً 1 cm کو 5 cm یا گراف پیپر سے 1 چھوٹا مربع کے ضلع کی لمبائی کو 10 یا 5 میٹر بھی یونٹ لیا جاسکتا ہے۔

سکیل یونٹ کا انتخاب کرتے ہوئے پیپر شیٹ کی جسامت ذہن میں رہے تا کہ گراف شیٹ پر ظاہر کیا جا سکے۔ بعض دفعہ ایک ہی سکیل دونوں x اور y کے لیے بھی مناسب لگتا ہے اور بعض دفعہ x اور y دونوں کے لیے مختلف سکیل بھی لیے جا سکتے ہیں جو x اور y کے محددات کی قیمتوں پر انحصار رکھتے ہیں۔

8.1.10 نیچے دی ہوئی مساواتوں کی اقسام کے گراف کی تشکیل

(a) $y = c$ جبکہ c ایک حقیقی نمبر ہے۔

(b) $x = a$ جبکہ a ایک حقیقی نمبر ہے۔

(c) $y = mx$ جبکہ m ایک حقیقی نمبر ہے۔

(d) $y = mx + c$ جبکہ m اور c دونوں مختلف حقیقی نمبر ہیں۔

اوپر دی ہوئی مساواتوں کے گراف کی تشکیل سے مراد ان کے ان نقاط کو مستوی میں ظاہر کرنا اور پھر ان نقاط کو باہم ملا کر ان کے گراف کی تشکیل حاصل کرنا ہے۔

(a) مستوی میں مساوات، $y = c$ نیچے دیے ہوئے نقاط کے سیٹ

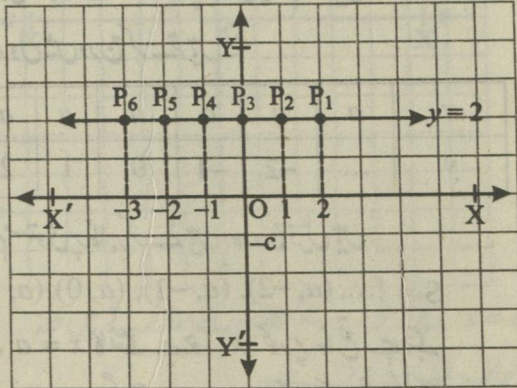
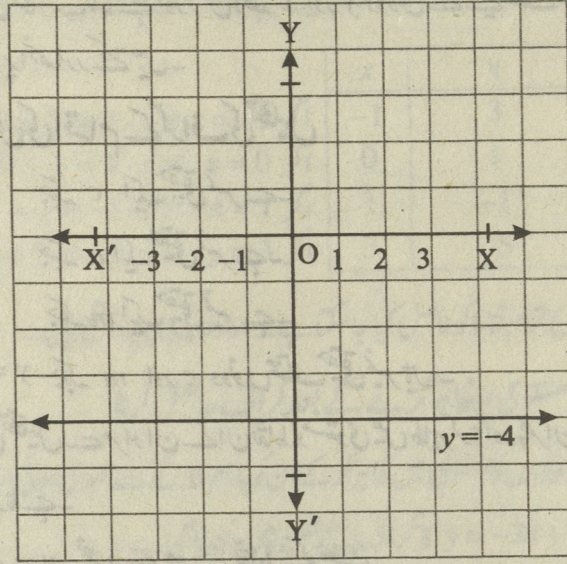
$$S = \{(x, c): x \in R\} \subseteq R \times R$$

کو ظاہر کرتی ہے جو اس پر واقع یا ہم خط ہیں۔

نیچے دی ہوئی مثال سے اس کے طریقے کی وضاحت کی جاتی ہے۔

اگر $y = 2$ ایک مساوات ہو تو سیٹ S کے نقاط کو نیچے جدول میں درج کیا گیا ہے۔ جیسا کہ

x	....	-3	-2	-1	0	1	2	....
y	2	2	2	2	2	2	2	2

سیٹ S کے نقاط کو نیچے مستوی میں ظاہر کیا گیا ہے اور ان نقاط کو باہم ملانے سے گراف کی شکل دی گئی ہے۔

اسی طرح مساوات $y = -4$ کا گراف ظاہر کیا گیا ہے۔

پس مساوات $y = c$ کی قسم کی تمام مساواتوں کے گراف کچھ یوں مشاہدہ میں آتے ہیں:

(i) گراف ایک سیدھی لائن ہے۔

(ii) گراف کی سیدھی لائن x- محور کے متوازی ہے۔

(iii) گراف کی لائن x- محور کے اوپر c یونٹس کے فاصلہ پر ہے جبکہ $c > 0$ ہو۔

(iv) گراف کی لائن x- محور کے نیچے c یونٹس کے فاصلہ پر ہے اگر $c < 0$ ہے جیسا کہ، مثال $y = -4$ سے ظاہر ہے۔

(v) گراف کی لائن x- محور ہی ہوگی اگر، $c = 0$ ہو۔

(b) **مستوی میں مساوات $x = a$ نیچے دیے ہوئے نقاط کے سیٹ ،**

$$S = \{(a, y) : y \in R\}$$

کو ظاہر کرتی ہے جو دی ہوئی مساوات $x = a$ پر واقع یا ہم خط ہیں۔

سیٹ S کے نقاط کو نیچے جدول میں درج کرتے ہیں۔

x	a	a	a	a	a	a	a	a	...
y	...	−2	−1	0	1	2	3	4	...

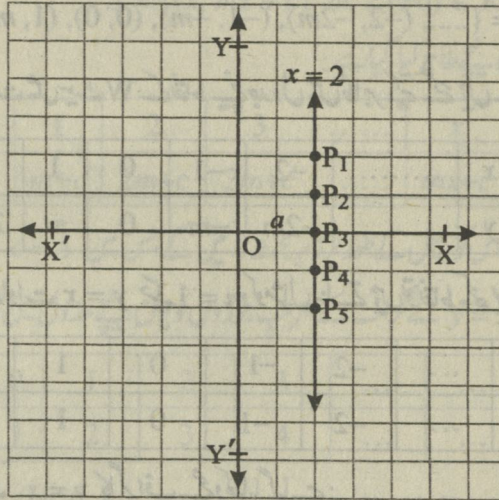
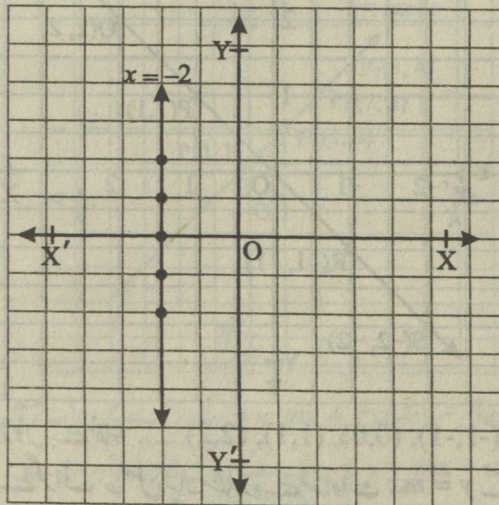
سیٹ S کے جن نقاط کو ہم مستوی پر ظاہر کرتے ہیں وہ درج ذیل ہیں:

$$S = \{\ldots, (a, -2), (a, -1), (a, 0), (a, 1), (a, 2), \ldots\}$$

نقطہ $(a, 0)$ مساوات $x = a$ کا نقطہ ہے جو x- محور پر واقع ہے جبکہ
نقطہ (a, y) x- محور سے اوپر ہے اگر $y > 0$ اور x- محور کے نیچے اگر $y < 0$ ہو۔

نقاط کو باہم ملانے سے ہم لائن کا مطلوبہ گراف حاصل کرتے ہیں۔
تفصیل کے ساتھ وضاحت نیچے مثال میں دی جائے گی۔
اگر مساوات $x = 2$ ہو تو اس کے نقاط کو نیچے جدول میں ظاہر کیا گیا ہے۔

x	2	2	2	2	2	2	... 2 ...
y	...	−2	−1	0	1	2	...

پس مساوات $x = 2$ کا گراف مستوی پر ظاہر کیا گیا ہے۔

اسی طرح مساوات $x = -2$ کا گراف بھی نیچے دکھایا گیا ہے۔

پس مساوات $x = a$ کے گراف سے ہم مشاہدہ سے اخذ کرتے ہیں کہ:

(i) لائن گراف ایک سیدھی لائن ہے۔

(ii) گراف y- محور کے متوازی لائن ہے۔

(iii) لائن گراف y-محور کی دائیں طرف 'a' فاصلہ پر ہے اگر $a > 0$ ہے۔

(iv) لائن گراف $x = -2$ ، y-محور کے بائیں جانب 2 یونٹ کے فاصلہ پر ہے اگر $a < 0$ ہے۔

(v) لائن گراف y- محور ہے اگر $a = 0$

(c) مستوی میں مساوات $y = mx$ $(m \in R)$ کے نقاط کا سیٹ

$$W = \{(x, mx) : x \in R\}$$

کو ظاہر کرتی ہے۔ مثلاً

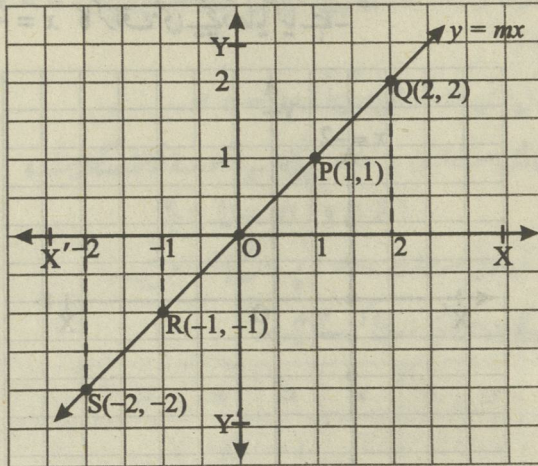
$$W = \{....., (-2, -2m), (-1, -m), (0, 0), (1, m), (2, 2m), ... \}$$

مرتب جوڑوں کی مطابقت میں سیٹ W کے نقاط نیچے جدول میں ظاہر کیے گئے ہیں۔

x	....	-2	-1	0	1	2	....
y	....	$-2m$	$-m$	0	m	$2m$	....

وضاحت کی خاطر ہم مساوات $y = x$ جبکہ $m = 1$ کو مثال بناتے ہیں تو نقاط کچھ یوں ظاہر کیے جائیں گے۔

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-2	-1	0	1	2	...

نقاط کی مدد سے مساوات $y = x$ کا گراف نیچے دکھایا گیا ہے:

جدول کے مرتب جوڑوں سے نقاط ....., (2,2), (1,1), (0,0), (-1,-1), (-2,-2),... کو مستوی پر واقع ظاہر کیا گیا ہے۔ نقاط کو باہم ملانے سے گراف حاصل کیا۔ مشاہدہ سے مساوات $y = mx$ کے گراف کے بارے میں جانا کہ:

(i) گراف ایک سیدھی لائن ہے۔

(ii) لائن گراف مبدا $O(0, 0)$ سے گزرتی ہے۔

(iii) لائن گراف میں $\frac{y}{x} = m$ $(x \neq 0)$ لائن گراف x - محور کی طرف جھکاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔

(iv) لائن گراف مستوی کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے۔ اگر $m = 1$ ہو تو یہ مساوات $y = x$ کا گراف ہوگا۔
اگر $m = -1$ ہو تو مساوات $y = -x$ کا گراف ہوگا۔

(v) لائن گراف x- محور اور y- محور کو صرف مبدا پر ہی ملتی ہے۔ اس کے علاوہ کسی نقطہ پر نہیں ملتی۔

(d) اس قسم میں ہم مساوات $y = mx + c$, جبکہ $m, c \neq 0$ کے گراف کے بارے میں جانیں گے

مستوی میں مساوات کے مترتب جوڑوں کا سیٹ:

$$S = \{(x, mx + c): m, c\ (\neq 0) \in R\}$$

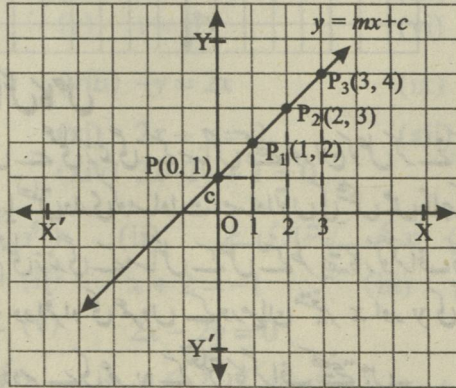
کے نقاط کو جدول میں نیچے ظاہر کیا گیا ہے:

x	0	1	2	3	……	x	……..
y	c	$m+c$	$2m+c$	$3m+c$	……	$mx+c$	……..

وضاحت کی خاطر ہم اس کو مثال کے طور پر زیر بحث لائیں گے جس میں $c = 1$ اور $m = 1$ لیا گیا ہے۔

پس مساوات $y = x + 1$ کے گراف کے مترتب جوڑوں کو یوں نیچے جدول میں ظاہر کرتے ہیں:

x	… 0	1	2	3	…	…	…
y	… 1	2	3	4	…	…	…

جن کے مستوی میں نقاط (0,1), (1,2), (2,3), (3,4)...... وغیرہ کو ظاہر کر کے باہم ملانے سے نیچے گراف حاصل کیا گیا ہے۔

گراف کے مشاہدہ سے ہم مساوات $y = mx + c$ کے بارے میں جانتے ہیں کہ:

(i) مساوات $y = mx + c$ کا گراف ایک سیدھی لائن کو ظاہر کرتا ہے۔

(ii) لائن گراف مبدا $O(0, 0)$ سے نہیں گزرتی۔

(iii) لائن گراف مبدا سے c یونٹس کے فاصلہ پر y- محور کو ملتی ہے۔

(iv) m جھکاؤ (slope) ہے مساوات $y = mx + c$ کی لائن گراف کا x- محور کی مثبت سمت میں۔

(v) اگر $c = 0$ ہو تو مساوات $y = mx$ یعنی مبدا (origin) $O(0, 0)$ سے گزرتی ہے۔

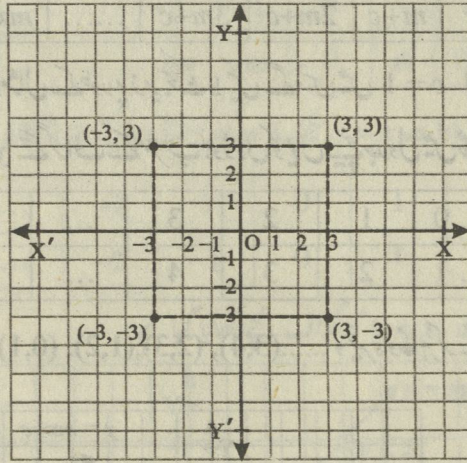
(vi) اگر $m = 0$ ہو تو لائن $y = c$ ، x- محور کے متوازی لائن ہے۔

8.1.11 دیے ہوئے جدول سے غیر تسلسل (Discrete) گراف بنانا

جدول کے مترتب جوڑوں کو مستوی کے نقاط میں ظاہر کرنا غیر تسلسل (discrete) گراف مانا جاتا ہے۔ یعنی نقاط کو باہم ملائے بغیر۔

مثال کے طور پر اگر نیچے دیے ہوئے جدول میں الگ الگ متغیرات x اور y کی قیمتیں درج ہوں جیسا کہ:

x	3	3	–3	–3
y	3	–3	3	–3

تو صرف مختلف نقاط ہی غیر تسلسل گراف کو ظاہر کرتے ہیں۔

8.1.12 حقیقی عملی زندگی کے مسائل کا حل

ہم اکثر گراف کے استعمال سے عملی زندگی کے مسائل سمجھنے اور ان کو حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گراف کی ہی مدد سے ہم مقداروں کے درمیان تعلق یا تعلق داری کو مساوات / مساواتوں کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔

نیچے دی ہوئی مثال سے ہم عملی زندگی کے مسائل کے حل کے طریقہ کار کو گراف کی مدد سے سیکھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

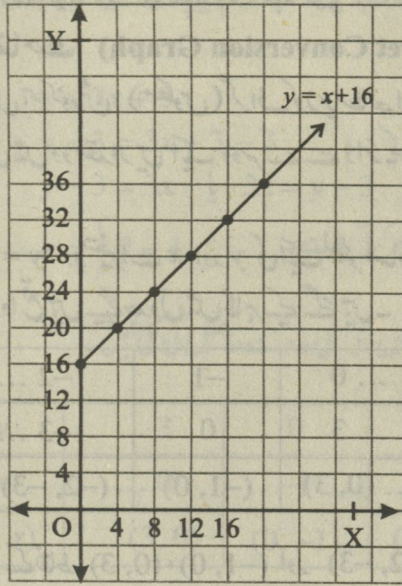
مثال مساوات $y = x + 16$ دو افراد کی عمروں کے درمیان متغیر x اور y کی تعلق داری سے سمجھتے ہیں۔ جیسا کہ اگر ایک فرد کی عمر x ہے تو دوسرے کی عمر y کے تعلق کا گراف کھینچتے ہیں۔

حل ہم جانتے ہیں کہ

$$y = x + 16$$

مساوات کے نقاط کے اعتبار سے جدول کچھ یوں ظاہر کرتا ہے۔

x	0	4	8	12	16	…
y	16	20	24	28	32	…

x اور y کی قیمتوں کو پلاٹ کرنے سے اس مساوات کا گراف نیچے دی ہوئی شکل میں حاصل ہوتا ہے۔

مشق 8.1

1۔ کوآرڈینیٹ مستوی (coordinate plane) کے ربع (quadrant) کا تعین کیجیے جن میں دیے ہوئے نقاط واقع ہیں: $P(-4, 3)$, $Q(-5, -2)$, $R(2, 2)$, $S(2, -6)$

2۔ نیچے دی ہوئی ہر مساوات کا گراف بنائیے۔

(i) $x = 2$ (ii) $x = -3$ (iii) $y = -1$

(iv) $y = 3$ (v) $y = 0$ (vi) $x = 0$

(vii) $y = 3x$ (viii) $-y = 2x$ (ix) $\frac{1}{2} = x$

(x) $3y = 5x$ (xi) $2x - y = 0$ (xii) $2x - y = 2$

(xiii) $x - 3y + 1 = 0$ (xiv) $3x - 2y + 1 = 0$

3۔ کیا دی ہوئی لائن (i) x-محور کے متوازی ہے (ii) y-محور کے متوازی ہے۔

(i) $2x - 1 = 3$ (ii) $x + 2 = -1$ (iii) $2y + 3 = 2$

(iv) $x + y = 0$ (v) $2x - 2y = 0$

4۔ دی ہوئی مساواتوں کو $y = mx + c$ میں ظاہر کرنے کے بعد m اور c کی قیمتیں معلوم کریں۔

(a) $2x + 3y - 1 = 0$ (b) $x - 2y = -2$ (c) $3x + y - 1 = 0$

(d) $2x - y = 7$ (e) $3 - 2x + y = 0$ (f) $2x = y + 3$

5۔ تصدیق کیجیے کہ کیا نیچے دیے گئے نقاط لائن $2x - y + 1 = 0$ پر واقع ہیں یا نہیں۔

(i) $(2, 3)$ (ii) $(0, 0)$ (iii) $(-1, 1)$

(iv) $(2, 5)$ (v) $(5, 3)$

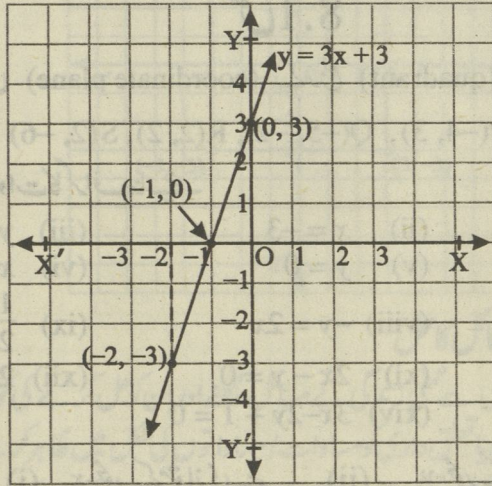
8.2 کنورشن گراف (Conversion Graphs)

8.2.1 کنورشن گراف کی وضاحت (To Interpret Conversion Graph)

یونٹ کے اس سیکشن میں ہم کنورشن (معکوس) گراف کو زیر مطالعہ لائیں گے۔ کنورشن گراف کی ایک لائن گراف کے طور پر وضاحت کریں گے جس میں دو مقداریں ایک دوسرے سے ڈائریکٹ پروپورشن (proportion) کے تعلق میں منسلک ہوتی ہیں۔

فرض کیجیے کہ $y = f(x)$ دو متغیرات x اور y کی ایک لینئر مساوات ہے اور اس کے مترتب جوڑوں کے نقاط جو مساوات، $y = 3x + 3$ پر واقع ہیں نیچے جدول میں ظاہر کیے گئے ہیں۔

x	... 0	−1	−2 ...
y	... 3	0	−3 ...
(x, y)	... (0, 3)	(−1, 0)	(−2, −3) ...

ان مترتب جوڑوں کو مستوی پر ان کے نقاط $(0, 3)$، $(-1, 0)$ اور $(-2, -3)$ وغیرہ سے ظاہر کرنے کے بعد مساوات کے لائن گراف کی شکل حاصل کی:

8.2.2 دیے گئے گراف کا پڑھنا (Reading of a Given Graph)

مساوات $y = 3x + 3$ کے گراف کو اوپر ظاہر کیا گیا ہے۔

(i) مساوات $y = 3x + 3$ میں x کی کسی بھی حقیقی قیمت کے بالمقابل y کی قیمت معلوم کی جا سکتی ہے۔

(ii) y کی ایک مقدار کے بالمقابل ہم اس طرح x کی مقدار کو مساوات $x = \frac{1}{3}y - 1$ کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں۔

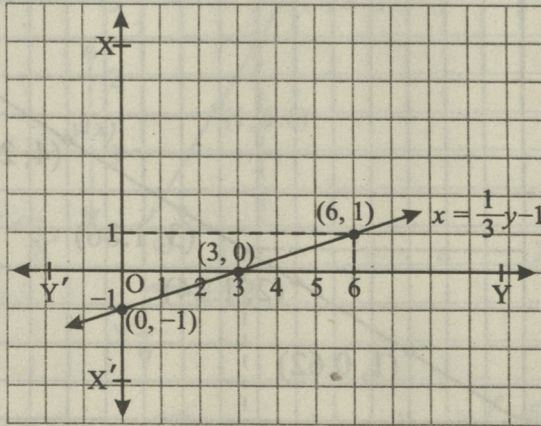
(iii) مساوات $x = \frac{1}{3}y - 1$ کا گراف مساوات $y = 3x + 3$ کے گراف کا کنورشن گراف سمجھا جاتا ہے۔

اس گراف کو پہلے گراف کا کنورشن گراف کہتے ہیں جب کہ ہم نیچے دی ہوئی مساوات $y = 3x + 3$ کو $x = \frac{1}{3} y - 1$ میں تبدیل کرتے ہیں۔ جیسا کہ

$$y = 3x + 3$$
$$\Rightarrow \quad y - 3 = 3x + 3 - 3$$
$$\Rightarrow \quad y - 3 = 3x$$ یا $$3x = y - 3$$
$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} y - 1,$$ یہاں x کو y کے حوالہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

جس میں جدول میں x کی قیمتیں y کی مدد سے حاصل کی گئی ہیں۔

y	… 3	0	6 …
x	… 0	–1	1 …
(y, x)	… (3, 0)	(0, –1)	(6, 1) …

پس کنورشن گراف x کا y کی مدد سے نیچے شکل میں ظاہر ہے:

8.2.3 کنورشن گراف کا مطالعہ (Reading the Conversion Graph)

مثال(a) کلومیٹر (Km) اور میل (Mile) گراف

کلومیٹر (Km) اور میل (Mile) کے درمیان باہم گراف تشکیل دینے کے لیے ہم درج ذیل میں ان کی مقداروں کے درمیان تعلق کو استعمال میں لاتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرتے ہیں۔

1 کلومیٹر = 0.62 میل (قریباً)

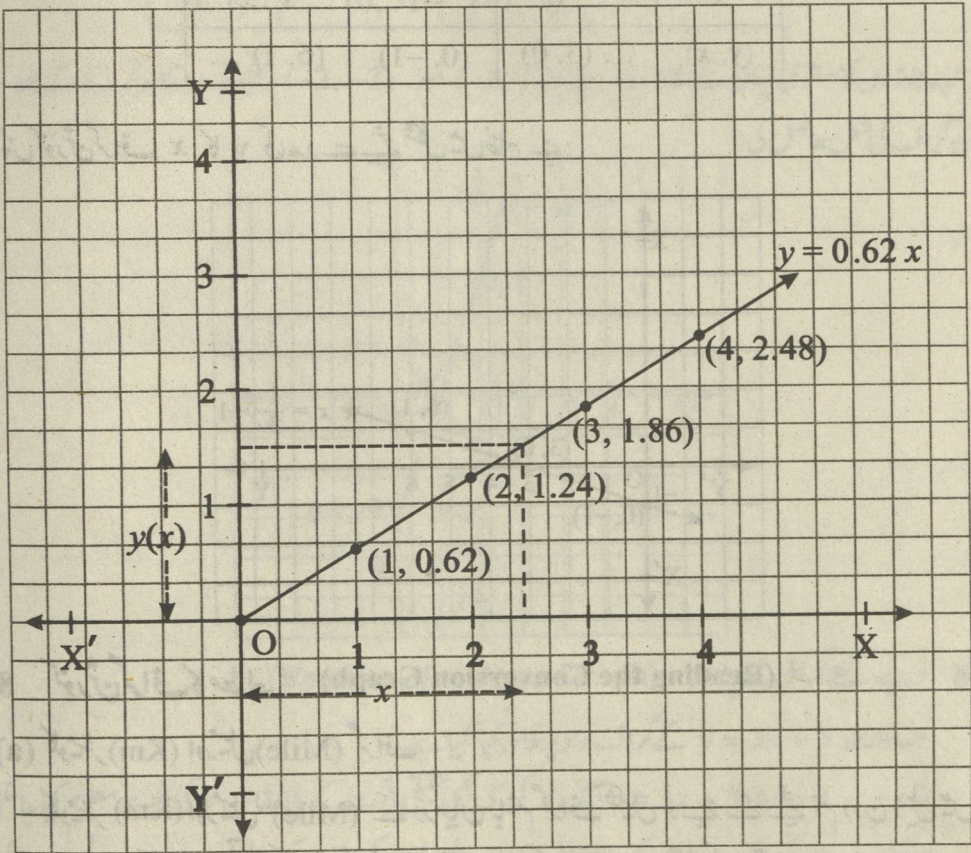
اور 1 میل = 1.6 کلومیٹر (قریباً)

(i) میل کوکلومیٹر کے خلاف مساوات کی وساطت میں یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = 0.62\,x$$

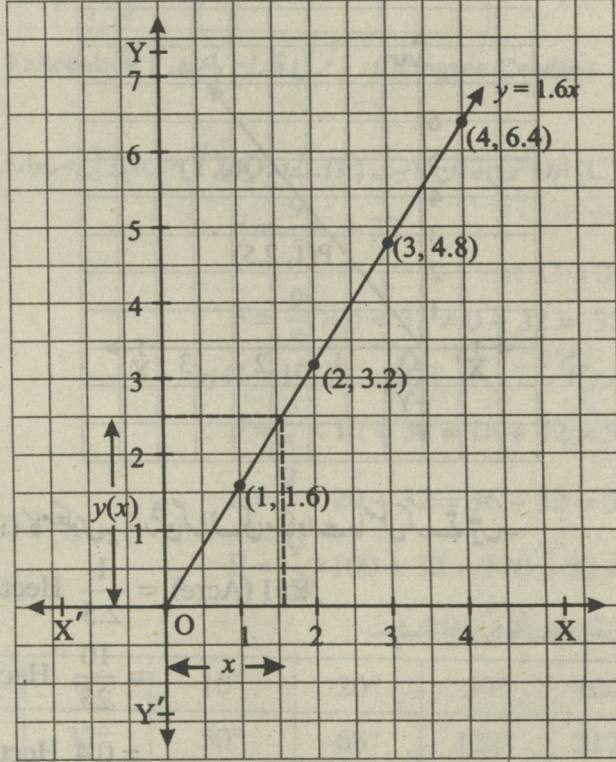
اگر x ایک کلومیٹر ہو اور y ایک میل تو ہم ان کے مترتب جوڑوں (x, y) کا جدول نیچے ظاہر کرتے ہیں:

x	0	1	2	3	4 ...
y	0	0.62	1.24	1.86	2.48 ...

مساوات $y = 0.62x$ کے مترتب جوڑوں (x, y) کو کارتیسی مستوی میں نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔ نقاط کو باہم ملانے سے مطلوبہ گراف حاصل ہوتا ہے۔

(ii) کنورشن گراف کے مطابق اگر میل کو x- ایکسز پر اور کلومیٹر کو y- ایکسز پر ظاہر کیا جائے تو مساوات قریباً یوں ظاہر کی جا سکتی ہے۔ $y = 1.6\,x$ (قریباً)

مندرجہ ذیل جدول میں x اور y کی متناسب قیمتیں یوں درج کرنے سے

x	0	1	2	3	4 ...
y	0	1.6	3.2	4.8	6.4 ...

مستوی میں مترتب جوڑوں (0, 0)، (1,1.6)، (2,3.2)، (3,4.8) اور (4,6.4) کے نقاط کو ظاہر کرنے اور ان کو باہم ملانے سے مطلوبہ گراف حاصل ہوگا۔ جو نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

(b) ہیکٹر اور ایکڑ کا کنورشن معکوس گراف (Conversion Graph of Hectors and Acres)

(i) ہیکٹر اور ایکڑ کی مساوات ان کے تعلق کو ظاہر کرتی ہے۔

$$1 \text{ ہیکٹر} = \frac{640}{259} \text{ ایکڑ}$$

$$= 2.5 \text{ ایکڑ} \quad \text{(قریباً)}$$

اگر ہیکٹر کو x اور ایکڑ کو y سے ظاہر کیا جائے تو ان کے باہمی تعلق کی مساوات

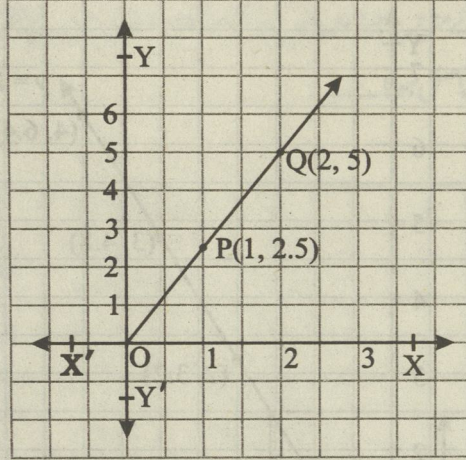
$$y = 2.5x$$

لکھی جائے گی۔

مترتب جوڑے (0,0), (1,2.5), (2,5), (3,7.5), (4, 10) ......

مساوات $y = 2.5x$ کی مطابقت میں درج ذیل جدول میں ترتیب سے ظاہر ہیں:

x	0	1	2	3	4 ...
y	0	2.5	5.0	7.5	10 ...

مستوی پر اوپر دیے مترتب جوڑوں کے نقاط ظاہر کرنے اور ان کو باہم ملانے سے گراف لائن حاصل ہوتی ہے۔
اس کو نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

(ii) اب ہم گراف (i) کا معکوس یا کنورشن گراف کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

1 ایکڑ $1 \text{ (Acre)} = \frac{1}{2.5}$ Hectare (ہیکٹر)

$= \frac{10}{25}$ Hectare ہیکٹر

$= 0.4$ Hectare (قریباً)

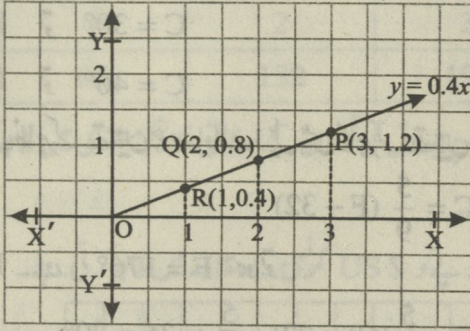
اگر ایکڑ کو x- ایکسز پر اور ہیکٹر کو y- ایکسز پر ظاہر کیا جائے تو مساوات

$$y = 0.4x$$

کی مدد سے مترتب جوڑے نیچے جدول میں یوں ظاہر کرنے سے

x	0	1	2	3 ...
y	0	0.4	0.8	1.2 ...

مستوی پر نقاط ((0, 0), (1, 0.4), (2, 0.8), (3, 1.2) ظاہر کرنے کے بعد ان کو باہم ملانے سے مطلوبہ گراف حاصل ہوتا ہے۔

گراف b(ii) گراف b(i) کا کنورشن گراف ہے۔

(c) ڈگری سیلسیس (Degree Celsius) اور ڈگری فارن ہائیٹ (Degree Fahrenheit) کا باہمی معکوس گراف

(i) ڈگری سیلسیس (C) اور ڈگری فارن ہائیٹ (F) کے درمیان تعلق مندرجہ ذیل مساوات کے تحت ہے۔

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

اگر $C = 0$ ہو

$$F = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 0 + 32 = 32$$

اس طرح اگر $C = 10, 20, ..., 100$ ہو

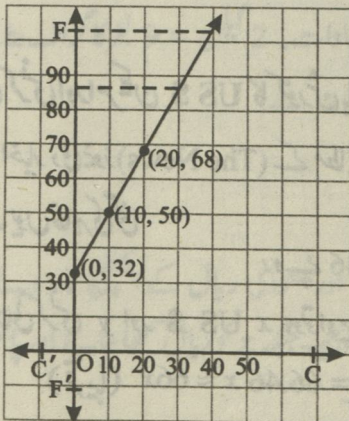
تو بالترتیب $F = \frac{9}{5} \times 10 + 32 = 18 + 32 = 50$

$$F = \frac{9}{5} \times 20 + 32 = 36 + 32 = 68$$

$$F = \frac{9}{5} \times 100 + 32 = 180 + 32 = 212$$

C اور F کی قیمتوں کو جدول میں یوں ظاہر کیا جاتا ہے۔

C	0°	10°	20°	50°	100° ...
F	32°	50°	68°	122°	212° ...

F° کا گراف بحوالہ C° یوں ظاہر کیا جاتا ہے

1 چھوٹا مربع کے ضلع کی لمبائی $= 10^{\circ}$

گراف کی مدد سے مشاہدہ کرتے ہیں کہ

(i) اگر $F = 86°$ تو $C = 30°$

(ii) اگر $F = 104°$ تو $C = 40°$

(iii) اب ہم C کو F میں ظاہر کرتے ہیں جو مساوات ذیل میں ظاہر کرتے ہیں۔

جیسا کہ

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

اگر $F = 68°$ اور $F = 176°$ ہو تو

$$C = \frac{5}{9}(68 - 32) = \frac{5}{9} \times 36 = 20°$$

اور

$$C = \frac{5}{9}(176 - 32) = \frac{5}{9}(144) = 5 \times 16 = 80°$$

اگر معلوم کرنا مقصود ہو کہ سیلسیس اور فارن ہائیٹ ڈگری کی قیمت برابر کب ہو گی تو مساوات $F = \frac{9}{5}C + 32$ میں $F = C$ درج کرنے سے

$$C = \frac{9}{5}C + 32$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{5} - 1\right)C = -32$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}C = -32 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-32 \times 5}{4} = -40$$

تصدیق کی خاطر

$$F = \frac{9}{5} \times (-40) + 32$$

$$= 9(-8) + 32$$

$$= -72 + 32 = -40$$

پس

$$-40\,°C = -40\,°F$$

(d) پاکستانی کرنسی اور امریکن US $ کا کنورشن یا معکوس گراف

پاکستانی اخبار دی نیوز (The News) کے مطابق پاکستانی کرنسی روپے کا امریکن کرنسی US $ کی تبدیلی کے تعلق کی مساوات یوں ظاہر کی گئی

1 US $ = 66.46 روپے

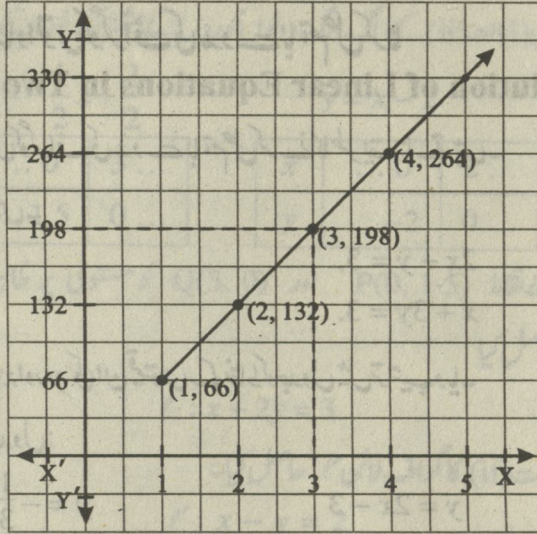
اگر پاکستانی کرنسی y اور US $ x ہو تو اوپر والی مساوات کو نیچے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = 66.46\,x \approx 66x \quad \text{(قریباً)}$$

تبدیلی گراف کو ظاہر کرنے کے لیے ان کی قیمتوں کو جدول میں یوں درج کرتے ہیں:

x	1	2	3	4 ...
y	66	132	198	264 ...

مترتب جوڑوں (x, y) کو اوپر جدول کی قیمتوں کے مطابق نقاط کو مستوی میں ظاہر کرنے اور باہم ملانے سے گراف کو تشکیل دیا گیا ہے۔

یہ لائن گراف پاکستانی کرنسی روپے کو US $ کرنسی کے مقابلہ میں ظاہر کرتی ہے۔

اس کا معکوس گراف بحوالہ مساوات

$$x = \frac{1}{66}y \quad \text{یا} \quad y = 66x$$

حاصل کیا جاسکتا ہے صرف x-ایکسز (axis) اور y-ایکسز (axis) کو باہم تبدیل کرنے سے۔

مشق 8.2

1۔ لِٹر (litre) اور گیلن (gallon) کے درمیان مقداری مساوات, 2 گیلن = 9 لِٹر کا گراف بنائیے۔ جبکہ لِٹر کو افقی اور گیلن کو راسی خط میں ظاہر کیا گیا ہو۔ مزید گراف کی مدد سے

(i) 18 لٹر میں گیلنوں کی

(ii) 8 گیلن میں لٹر کی مقدار بتائیے۔

2۔ 15 مارچ 2008 کے دن پاکستانی کرنسی روپے اور سعودی ریال کے ایکسچینج فارمولے کے مطابق روپے 16.70=1 ریال تھا۔ ان کو گراف کی مدد سے ظاہر کیجیے۔ جبکہ x کو ریال سمجھا جائے اور پاکستانی روپے کو y تو مساوات, $y = 16.70\,x$ کا کنورشن گراف بنائیے۔

3۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے لائن گراف بنائیے۔

(a) $x - 3y + 2 = 0$　(b) $3x - 2y - 1 = 0$　(c) $2y - x + 2 = 0$

(d) $y - 2x = 0$　(e) $3y - 1 = 0$　(f) $y + 3x = 0$

(g) $2x + 6 = 0$

4۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے گراف کی تشکیل کیجیے۔

(i) 1 میل = 1.6 کلومیٹر　(ii) 1 ایکڑ = 0.4 ہیکٹر

(iii) $F = \frac{9}{5}C + 32$　(iv) 1 روپیہ = $\frac{1}{86}$ \$

8.3 دی ہوئی دو متغیراتی مساواتوں کو گراف کی مدد سے باہم حل کرنا

(Graphical Solution of Linear Equations in Two Variables)

ہم یہاں دو لینئر مساواتوں کو گراف کی مدد سے باہم حل کرنے کا طریقہ بتاتے ہیں۔

دو مساواتیں فرضی درج کیں۔

$2x - y = 3,$ ...... (i)

$x + 3y = 3.$ ...... (ii)

ان دونوں مساواتوں میں x اور y کی ان قیمتوں کے نقاط کو جدول میں ترتیب دیا۔

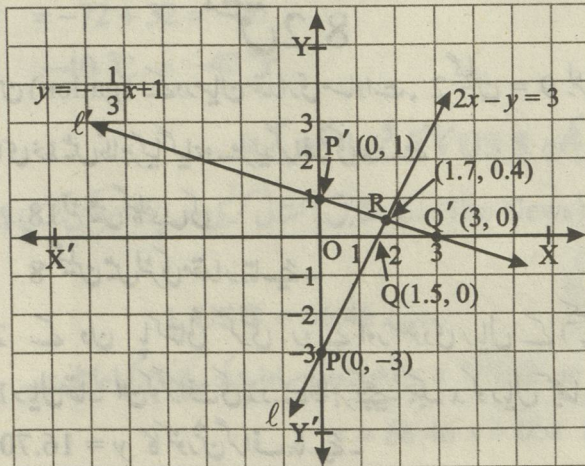
مساواتوں کی قیمتوں کے جدول:

$y = 2x - 3$

x	... 0	1.5 ...
y	... –3	0 ...

$y = -\frac{1}{3}x + 1$

x	... 0	3	...
y	... 1	0	...

الگ الگ جدول کے نقاط کو ظاہر کر کے اور ان کو ملا کر گراف تیار کر لیے جیسے نیچے ظاہر کیے گئے ہیں۔

جہاں دونوں گراف لائن ℓ' اور ℓ باہم ملتی ہیں وہی نقطہ ان کا واحد حل ہے۔

پس نقطہ $R(1\cdot7, 0\cdot4)$ کے محددات، $x = 1.7$ اور $y = 0\cdot4$ حل کو ظاہر کرتے ہیں۔

مثال مندرجہ ذیل دو مساواتوں کو گراف کی مدد سے حل کیجیے۔

$$x + 2y = 3, \qquad \ldots\ldots(i)$$

$$x - y = 2. \qquad \ldots\ldots(ii)$$

حل دونوں مساواتوں (i) اور (ii) کے گراف مستوی پر ظاہر کیجیے۔ ان کے ان نقاط کی مدد سے جو x- محور اور y- محور کے ساتھ مشترک ہیں۔

دونوں مساواتوں (i) اور (ii) کے الگ الگ دونوں محوروں کے مشترک نقاط کے جدول تیار کیے:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

x	… 0	3 …
y	… 1.5	0 …

$$y = x - 2$$

x	… 0	2 …
y	… −2	0 …

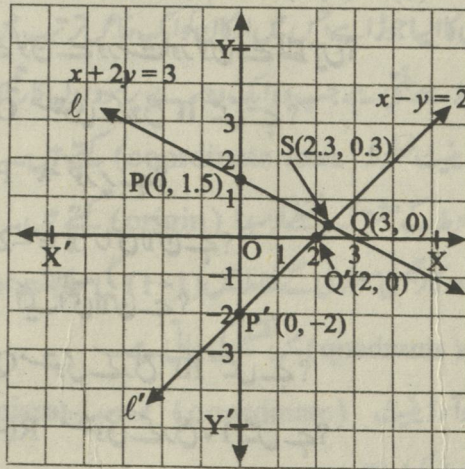
مساوات (i) کے نقاط $P(0, 1\cdot5)$ اور $Q(3, 0)$ کو مستوی پر ظاہر کیا اور ان کو ملانے سے اس کا گراف لائن حاصل کیا

$$\ell : x + 2y = 3$$

اسی طرح مساوات (ii) کا گراف لائن ℓ' حاصل کیا۔

$$\ell' : x - y = 2$$

جو نقاط $P'(0, -2)$ اور $Q'(2, 0)$ کو مستوی پر ظاہر کرنے اور ان کو باہم ملانے سے حاصل کیا۔

جیسا کہ نیچے شکل میں ظاہر کیے گئے ہیں:

گراف لائن ℓ اور ℓ' کا مشترک نقطہ $S(2\cdot3, 0\cdot3)$ ہی مطلوبہ حل ہے۔

مشق 8.3

مندرجہ ذیل مساواتوں کے جوڑوں کو گراف کی مدد سے باہم حل کیجیے۔

1. $x + y = 0$ ، $2x - y + 3 = 0$
2. $x - y + 1 = 0$ ، $x - 2y = -1$
3. $2x + y = 0$ ، $x + 2y = 2$
4. $x + y - 1 = 0$ ، $x - y + 1 = 0$
5. $2x + y - 1 = 0$ ، $x = -y$

اعادہ مشق 8

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) اگر $(x - 1, y + 1) = (0, 0)$ ہو تو (x, y) برابر ہے:

(a) $(1, -1)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(1, 1)$ (d) $(-1, -1)$

(ii) اگر $(x, 0) = (0, y)$ ہو تو (x, y) برابر ہے:

(a) $(0, 1)$ (b) $(1, 0)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(1, 1)$

(iii) نقطہ $(2, -3)$ مستوی کے ربع میں ہے:

(a) I (b) II (c) III (d) IV

(iv) نقطہ $(-3, -3)$ مستوی کے ربع میں ہے:

(a) I (b) II (c) III (d) IV

(v) اگر $y = 2x + 1, x = 2$ ہو تو y برابر ہے:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

(vi) کون سا نقطہ مساوات $y = 2x$ کے گراف پر واقع ہے؟

(a) $(1, 2)$ (b) $(2, 1)$ (c) $(2, 2)$ (d) $(0, 1)$

2۔ مندرجہ ذیل جملوں میں سے کون سے درست اور کون سے غلط ہیں؟

(i) نقطہ $O(0, 0)$ مستوی کے ربع II میں ہے؟ ....

(ii) نقطہ $P(2, 0)$ x-محور پر ہے؟ ....

(iii) گراف لائن $x = -2$ راسی لائن ہے؟ ....

(iv) $3 - y = 0$ ایک افقی لائن ہے؟ ....

(v) نقطہ $Q(-1, 2)$ مستوی کے ربع III میں ہے؟ ....

(vi) نقطہ $R(-1, -2)$ مستوی کے ربع IV میں ہے؟ ....

(vii) لائن $y = x$ ایسی لائن ہے جس پر مبدا (origin) واقع ہے؟ ....

(viii) نقطہ $P(1, 1)$ لائن $x + y = 0$ پر واقع ہے؟ ....

(ix) نقطہ $S(1, -3)$ مستوی کے ربع III میں واقع ہے؟ ....

(x) نقطہ $R(0, 1)$ x-محور پر واقع ہے؟ ....

3۔ مندرجہ ذیل نقاط کو گراف پیپر پر ظاہر کیجیے۔

$(-3, -3), (-6, 4), (4, -5), (5, 3)$

4۔ مندرجہ ذیل مساواتوں کے گراف تشکیل دیجیے۔

(i) $x = -6$ (ii) $y = 7$

(iii) $x = \frac{5}{2}$ (iv) $y = -\frac{9}{2}$

(v) $y = 4x$ (vi) $y = -2x + 1$

5۔ دی ہوئی مساواتوں کے گراف تشکیل دیجیے۔

(i) $y = 0.62x$ (ii) $y = 2.5x$

6۔ نیچے دی ہوئی مساواتوں کو گراف کی مدد سے باہم حل کیجیے۔

(i) $x + y = \frac{1}{2}$ ، $x - y = 1$

(ii) $2x - 3y = -6$ ، $x = 3y$

(iii) $\frac{1}{2}(x - y) = -1$ ، $\frac{1}{3}(x + y) = 2$

خلاصہ

☆ ایک مترتب جوڑا دو ارکان کا ایسا جوڑا ہے جس میں ارکان کو ایک خاص ترتیب میں درج کیا جائے۔

☆ مستوی جو دو سیدھے خطوط سے بنتی ہے جب وہ ایک دوسرے پر عمود ہوں کارتیسی مستوی کہلاتی ہے۔ باہم عمودی خطوط کے جوڑے کو کوآرڈینیٹ خطوط (coordinate axes) کہتے ہیں۔

☆ مستوی کے باہم عمودی خطوط کے مشترک نقطے کو مبدا (origin) کہتے ہیں۔

☆ مترتب جوڑوں کے سیٹ اور کارتیسی مستوی کے نقاط میں (1-1) کی مطابقت ہوتی ہے۔

☆ کارتیسی مستوی چار ربعوں (quadrants) میں تقسیم کی جاتی ہے۔

☆ نقطہ (x, y) کے x- کوآرڈینیٹ (coordinate) کو ایبسیسا (abscissa) اور y- کوآرڈینیٹ کو آرڈینیٹ (ordinate) کہا جاتا ہے۔

☆ ایسے نقاط کا سیٹ جو ایک خط یا لائن پر ہوں کولینئر (collinear) نقاط کہلاتے ہیں۔

یونٹ 9

کوآرڈینیٹ جیومیٹری کا تعارف

(INTRODUCTION TO COORDINATE GEOMETRY)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

9.1 تعارف (Introduction)

9.2 قطعہ خط کی لمبائی کا فارمولا (The Distance Formula)

9.3 ہم خط نقاط (Collinear Points)

9.4 درمیانی نقطہ فارمولا (Mid-Point Formula)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

یونٹ کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب ہر طالب علم درج ذیل تصورات کو ہو بہو بیان کرنے پر علمی دسترس حاصل کر لے:

☆ کوآرڈینیٹ (coordinate) جیومیٹری کی تعریف کر سکے۔

☆ لمبائی کے فارمولا کا ثبوت دے سکے اور اس کی مدد سے کارتیسی مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ کی لمبائی معلوم کر سکے۔

☆ لمبائی کے فارمولا کی مدد سے دو نقاط کے درمیان لمبائی کو ماپ سکے۔

☆ ہم خط نقاط کی تعریف کر سکے اور ہم خط اور غیر ہم خط نقاط میں فرق / پہچان کر سکے۔

☆ لمبائی کے فارمولا سے دیے ہوئے تین یا تین سے زیادہ نقاط کو ہم خط ظاہر کر سکے۔

☆ فارمولا کی مدد سے ثابت کر سکے کہ تین غیر ہم خط نقاط مستوی میں ایک مثلث بناتے ہیں جن کے

- تینوں اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں یعنی مثلث متساوی الاضلاع (An Equilateral Triangle)
- دو اضلاع کی لمبائیاں یکساں ہوں یعنی مثلث متساوی الساقین (An Isosceles Triangle)
- ایک زاویہ 90° کا ہو یعنی قائمہ زاویہ مثلث (A Right Angled Triangle)
- تینوں اضلاع کی لمبائیاں مختلف ہوں یعنی مختلف الاضلاع مثلث (A Scalene Triangle)

☆ فارمولا کی مدد سے ثابت کر سکے کہ چار غیر ہم خط نقاط سے چار اضلاع کی اشکال

- ایک مربع (A Square)
- ایک مستطیل (A Rectangle)
- ایک متوازی الاضلاع (A Parallelogram)

بنائی جاسکتی ہیں۔

☆ فارمولا کی پہچان کریں جو دو مختلف نقاط کے درمیانی نقطہ کو ظاہر کر سکے۔

☆ فارمولاز کی مدد سے جیومیٹری کے نتائج کو حاصل کرنا یا تصدیق کرنا سمجھ سکے۔

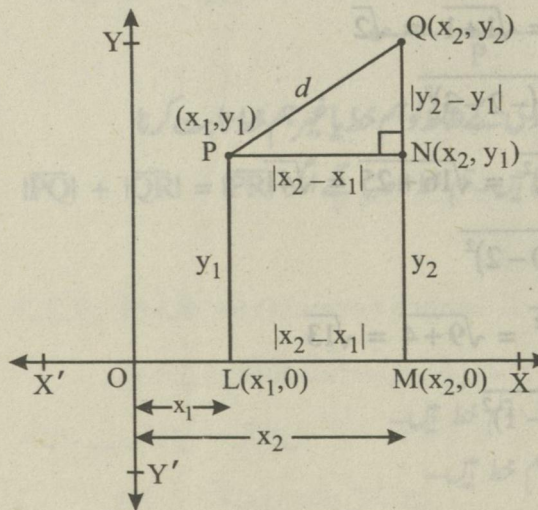
9.1 فاصلہ کا فارمولا (Distance Formula)

9.1.1 کوآرڈینیٹ جیومیٹری (Coordinate Geometry)

ایک مستوی میں جیومیٹری کی اشکال کے مطالعہ کو مستوی یا پلین جیومیٹری کہتے ہیں۔ اسی طرح کوآرڈی نیٹ جیومیٹری، جیومیٹری کی اشکال کے کارتیسی مستوی میں مطالعہ کرنے کا نام ہے۔

ہم نے یونٹ (8) میں سیکھا ہے کہ دو باہم عمودی خطوط جو مبدا پر ملتے ہیں، مستوی کو چار ربعوں (quadrants) میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی جانا ہے کہ سیٹ R×R کے مترتب جوڑوں اور مستوی کے تمام نقاط کے درمیان (1-1) کی مطابقت ہے۔

9.1.2 مستوی کے دو نقاط کے درمیان فاصلہ کے فارمولا کا حصول

(Finding Distance Between two Points)

اگر $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کوآرڈینیٹ (coordinate) مستوی یا پلین میں دو نقاط ہوں اور حقیقی نمبر d کو قطعہ خط PQ کی لمبائی مان لیا جائے یعنی، $|\overline{PQ}| = d$، تو قطعہ خط LM خط x- ایکسز اور LP خط y- ایکسز کے متوازی ہوں اور دونوں نقاط M اور L خط x- ایکسز پر ہوں تو نقاط $L(x_1, 0)$ اور $M(x_2, 0)$ بمعہ محددات ہوں گے۔ سامنے شکل کے حوالہ سے قطعہ خط PN خط x- ایکسز کے متوازی ہوگا۔

قائمہ زاویہ مثلث PNQ میں

$$|\overline{NQ}| = |y_2 - y_1|$$

اور

$$|\overline{PN}| = |x_2 - x_1|$$

فیثا غورث قانون کی مدد سے چونکہ $\angle PNQ = 90^o$ اس لیے

$$(\overline{PQ})^2 = (\overline{PN})^2 + (\overline{QN})^2$$

$$\Rightarrow \quad d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$\Rightarrow \quad d = \pm\sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

پس نیچے درج مساوات فاصلہ فارمولا کہلاتا ہے۔

فارمولا: $d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$ (ہمیشہ) $d > 0$ جبکہ

9.1.3 فاصلہ فارمولا کا استعمال (Use of Distance Formula)

فاصلہ فارمولا کے استعمال کو مندرجہ ذیل مثالوں سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 1 فاصلہ فارمولا کی مدد سے درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں

(i) P(1, 2) ، Q(0, 3) (ii) S(−1, 3) ، R(3, −2)

(iii) U(0, 2) ، V(−3, 0) (iv) P′(1, 1) ، Q′(2, 2)

حل

(i) $|\overline{PQ}| = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

(ii) $|\overline{SR}| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-2-3)^2}$

$= \sqrt{(3+1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

(iii) $|\overline{UV}| = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-2)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

(iv) $|\overline{PQ}| = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

مشق 9.1

1۔ درج ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

(a) A(9, 2), B(7, 2) (b) A(2, –6), B(3, –6)

(c) A(–8, 1), B(6, 1) (d) A(–4, $\sqrt{2}$), B(–4, –3)

(e) A(3, –11), B(3, –4) (f) A(0, 0), B(0, –5)

2۔ اگر P ایک ایسا نقطہ ہے جو خط x- ایکسز پر واقع ہے اور اس کا x- محدد a ہے۔ Q ایک نقطہ ہے جو y- ایکسز پر واقع ہے اور اس کا y- محدد b ہے۔ جیسے نیچے درج ہے۔ نقاط P اور Q کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

(i) $a = 9, b = 7$ (ii) $a = 2, b = 3$ (iii) $a = -8, b = 6$

(iv) $a = -2, b = -3$ (v) $a = \sqrt{2}, b = 1$ (vi) $a = -9, b = -4$

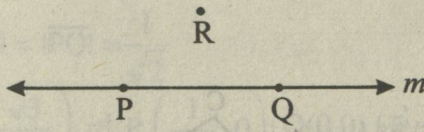
9.2 ہم خط یا ہم لائن نقاط (Collinear Points)

9.2.1 مستوی میں ہم خط یا غیر ہم خط نقاط (Collinear or Non-collinear Points in the Plane)

دو یا دو سے زیادہ نقاط جو ایک ہی خط پر واقع ہوں ہم خط (collinear) کہلاتے ہیں۔ (بحوالہ اس خط کے) جو نقاط ہم خط نہ ہوں یا ایک سے زیادہ خطوط پر واقع ہوں غیر ہم خط (non-collinear) کہلاتے ہیں۔

اگر PQ ایک خط ہو تو تمام نقاط جو خط m پر واقع ہوں ہم خط ہیں۔ نیچے دی ہوئی شکل میں نقاط P اور Q ہم خط ہیں بحوالہ خط m اور نقاط P اور R ہم خط نہیں (بحوالہ خط m)۔

R

P Q m

9.2.2 فاصلہ فارمولا کی مدد سے تین یا تین سے زیادہ مستوی کے نقاط کو ہم خط یا غیر ہم خط ثابت کرنا

تین دیے ہوئے نقاط P، Q اور R جو مستوی میں ہیں۔ ہم خط ہوں گے اگر $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = |\overline{PR}|$ ہو ورنہ غیر ہم خط ہوں گے۔

مثال: فاصلہ فارمولا سے ظاہر کیجیے کہ نقاط

(i) P(–2, –1)، Q(0, 3) اور R(1, 5) ہم خط ہیں۔

(ii) نقاط P، Q، R اور S(1, –1) غیر ہم خط ہیں۔

حل:

(i) فاصلہ فارمولا کے استعمال سے ہم معلوم کرتے ہیں کہ

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(0+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(1-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

اور

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(1+2)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

چونکہ

$$|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = |\overline{PR}|$$

اس لیے

نقاط P، Q اور R ہم خط ہیں۔

(ii)

$$|\overline{PS}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0} = 3$$

$$|\overline{QS}| = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

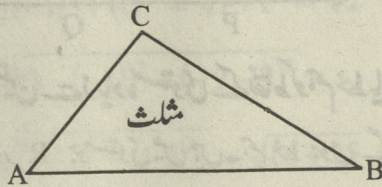
چونکہ

$$|\overline{PQ}| + |\overline{QS}| \neq |\overline{PS}|$$

اس لیے نقاط P ، Q اور S ہم خط نہیں ہیں۔

پس نقاط P ، Q ، R اور S بھی ہم خط نہیں ہیں۔

یادرہے کہ یونٹ (8) کے مطالعہ سے آپ مثلث یا تکون کی شکل سے واقف ہیں کہ

مستوی میں مثلث ایک ایسی بند شکل ہے جو تین غیر ہم خط نقاط کو ملانے سے بنتی ہے۔ مثلث ABC کے تینوں غیر ہم خط نقاط A، B اور C مثلث کے کونے (vertices) اور قطعہ خط AB، BC اور CA مثلث ABC کے اضلاع کہلائیں گے۔

9.2.3 فاصلہ فارمولا (Distance Formula) کے استعمال سے مثلث کی مختلف اقسام کی تشکیل

جیومیٹری میں مثلث کے تصور کی توسیع کی خاطر ہم نیچے مثلث کے اضلاع کی لمبائی کے اعتبار سے اس کی مختلف اقسام سے روشناس کراتے ہیں:

(i) متساوی الاضلاع مثلث (ii) متساوی الساقین مثلث

(iii) قائمہ زاویہ مثلث (iv) مختلف الاضلاع مثلث

ہم اوپر مذکورہ مثلثان (i) تا (iv) کے بارے میں بالترتیب بحث کرتے ہیں۔

(i) متساوی الاضلاع مثلث (Equilateral Triangle)

اگر دی ہوئی مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائی برابر ہو تو مثلث متساوی الاضلاع مثلث کہلاتی ہے۔

مثال: مثلث OPQ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے کیونکہ اس کے تینوں کونوں کے نقاط $O(0,0)$، $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ اور $Q\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ ہم خط نہیں۔ جبکہ

$$|\overline{OP}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\overline{QO}| = \sqrt{\left(0-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(0-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اور

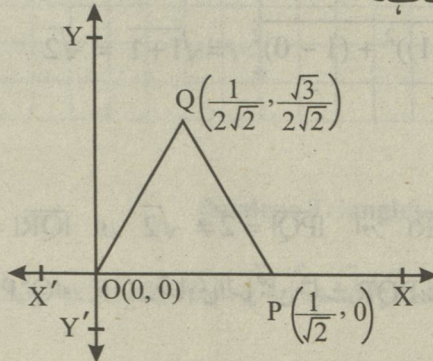
$$|\overline{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-0\right)^2}$$

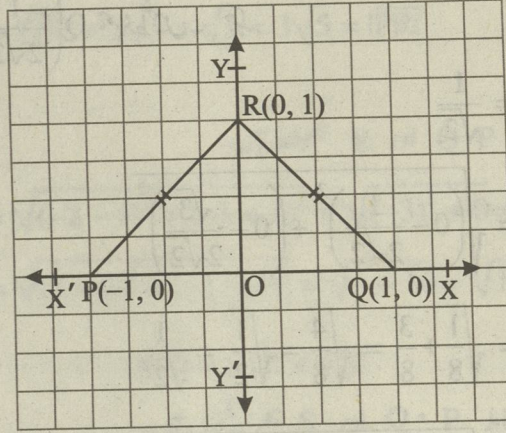
$$= \sqrt{\left(\frac{1-2}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس

$$|\overline{OP}| = |\overline{QO}| = |\overline{PQ}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

جو ایک حقیقی نمبر ہے اور نقاط $O(0,0)$، $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ اور $Q\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ ہم خط نہیں اس لیے مثلث OPQ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

(ii) متساوی الساقین مثلث (Isosceles Triangle)

ایک متساوی الساقین مثلث ایسی مثلث ہے جس کے دو اضلاع کی لمبائی برابر ہے۔ جبکہ تیسرے ضلع کی لمبائی مختلف ہے۔

مثال مثلث PQR ایک متساوی الساقین ہے جس کے کونوں کے نقاط (0 ,1-)P ‘ (0 ,1)Q اور (1 ,0) R ہم خط نہیں۔ جیسا کہ نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

فاصلہ فارمولا کی مدد سے

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(1-(-1))^2 + (0-0)^2}$$

$$= \sqrt{(1+1)^2 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{PR}| = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

چونکہ

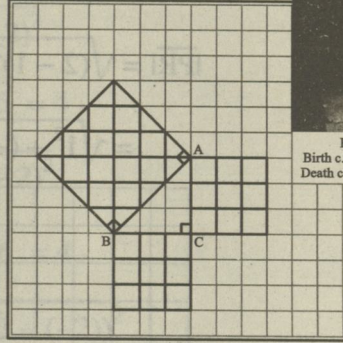
$|\overline{QR}| = |\overline{PR}| = \sqrt{2}$ اور $|\overline{PQ}| = 2 \neq \sqrt{2}$ اور $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| > |\overline{PR}|$

اس لیے غیر ہم خط نقاط P ‘Q اور R ایک متساوی الساقین مثلث PQR بناتے ہیں۔

(iii) قائمہ زاویہ مثلث (Right Angled Triangle)

ایک مثلث جس کے اندرونی زاویوں میں سے ایک زاویہ $90°$ کا ہو قائمہ زاویہ مثلث کہلاتی ہے۔

مثال اگر $O(0, 0)$ ، $P(-3, 0)$ اور $Q(0, 2)$ تین نقاط غیر ہم خط ہوں تو ثابت کیجیے کہ مثلث OPQ ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

چونکہ

$$|\overline{OQ}| = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

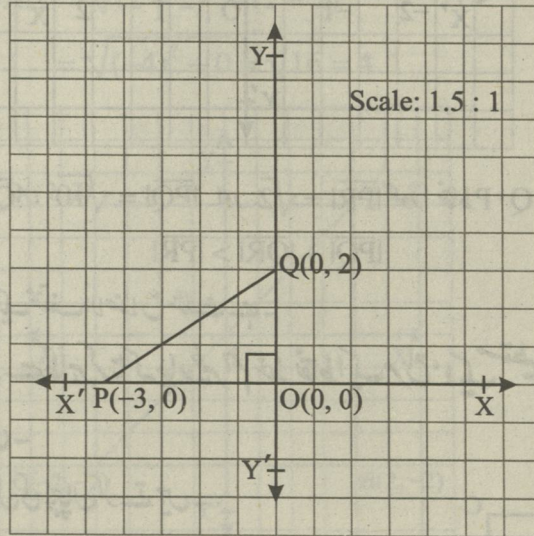
$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$|\overline{OQ}|^2 + |\overline{OP}|^2 = (2)^2 + (3)^2$$

$$= 13 = |\overline{PQ}|^2$$

اور $|\overline{OQ}|^2 + |\overline{OP}|^2 = |\overline{PQ}|^2$

اس لیے $90° = \angle POQ$

پس نقاط $O(0, 0)$، $P(-3, 0)$ اور $Q(0, 2)$ مثلث OPQ بناتے ہیں جو قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

(iv) مختلف الاضلاع مثلث (Scalene Triangle)

ایک مثلث مختلف الاضلاع مثلث کہلاتی ہے اگر اس کے تینوں اضلاع کی لمبائی ایک دوسرے سے مختلف ہو۔

مثال تصدیق کیجیے کہ نقاط $P(1, 2)$ ، $Q(-2, 1)$ اور $R(2, 1)$ مستوی میں مختلف اضلاع مثلث بناتے ہیں۔

حل چونکہ

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2}$$

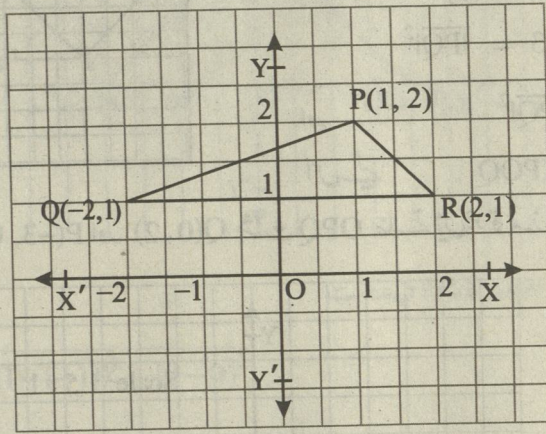
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \ ,$$

$$|\overline{QR}| = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 0^2} = \sqrt{4^2} = 4 \ ,$$

اور

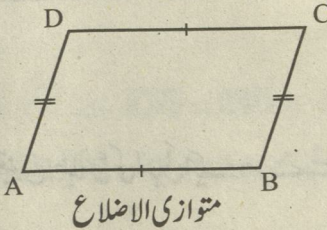
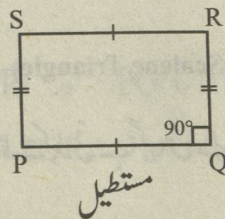
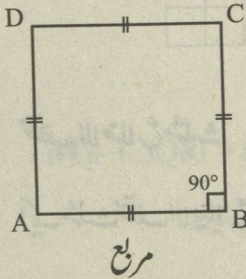
$$|\overline{PR}| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

اس لیے $|\overline{QR}| = 4$ ، $|\overline{PQ}| = \sqrt{10}$ اور $|\overline{PR}| = \sqrt{2}$ اور نقاط P، Q، R غیر ہم خط ہیں۔ کیونکہ

$$|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| > |\overline{PR}|$$

پس مثلث PQR ایک مختلف الاضلاع مثلث ہے۔

9.2.4 فاصلہ فارمولا کی مدد سے ظاہر کرنا کہ چار غیر ہم خط نقاط ایک مربع، ایک مستطیل اور ایک متوازی الاضلاع کی تشکیل کرتے ہیں۔

پہلے ہم ان تینوں اشکال کی پہچان کرتے ہیں۔

(a) فاصلہ فارمولا کی مدد سے دیے ہوئے چار غیر ہم خط نقاط سے ایک مربع کی تشکیل

مستوی میں مربع ایک ایسی بند شکل ہے جو چار غیر ہم خط نقاط سے بنتی ہے اس کے چاروں اضلاع کی لمبائی برابر اور ہر زاویہ $90°$ کا ہوتا ہے۔

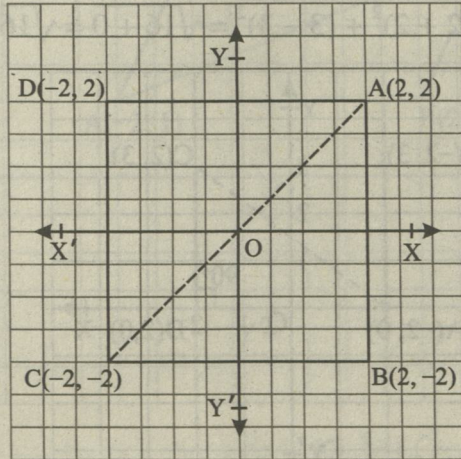
مثال اگر $A(2, 2)$ ، $B(2, -2)$ ، $C(-2, -2)$ اور $D(-2, 2)$ چار نقاط غیر ہم خط ہوں تو تصدیق کیجیے کہ یہ نقاط مربع ABCD بناتے ہیں۔

حل فاصلہ فارمولا کی مدد سے

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-2)^2}$$
$$= \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4,$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2+2)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4,$$
$$|\overline{CD}| = \sqrt{(-2-(-2))^2 + (2-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{(-2+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4,$$

اور

$$|\overline{DA}| = \sqrt{(2+2)^2 + (2-2)^2}$$
$$= \sqrt{(+4)^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

پس

$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}| = 4$$

یعنی شکل کے چاروں اضلاع لمبائی میں برابر ہیں۔

مزید

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

اور
$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = (4)^2 + (4)^2 = 32,$$
$$|\overline{AC}|^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$
چونکہ
$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 = |\overline{AC}|^2,$$
اس لیے
$$\angle ABC = 90^\circ$$
اسی طرح
$$\angle ADC = \angle DCB = \angle DAB = 90^\circ$$
پس دیے ہوئے چار نقاط C،B،A اور D غیر ہم خط ہیں جو مربع شکل ABCD کی تشکیل کرتے ہیں۔

(b) فاصلہ فارمولا کی مدد سے ثابت کیجیے کہ چار غیر ہم خط نقاط مستطیل بناتے ہیں

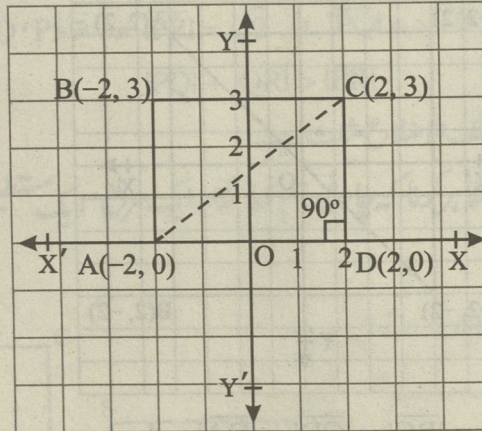
مستوی میں ایک ایسی بند شکل جو چار غیر ہم خط نقاط سے بنتی ہے مستطیل کہلاتی ہے اگر اس کے

(i) آمنے سامنے کے اضلاع لمبائی میں برابر ہوں۔

(ii) ہر کونے پر زاویہ 90° کا ہو۔

مثال ظاہر کیجیے کہ نقاط A(−2, 0) ، B(−2, 3) ، C(2, 3) اور D(2, 0) ایک مستطیل بناتے ہیں۔

حل دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کرنے کا فارمولا استعمال کرنے سے

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$$
$$|\overline{DC}| = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{0+9} = \sqrt{9} = 3$$
$$|\overline{AD}| = \sqrt{(2+2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$
اور
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(2+2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4$$

چونکہ $|\overline{AB}| = |\overline{DC}| = 3$ اور $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 4$

اس طرح مستطیل کے بالمقابل اضلاع برابر ہوئے اور مزید

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

اس لیے $\quad |\overline{AD}|^2 + |\overline{DC}|^2 = (4)^2 + (3)^2 = 25$ اور $|\overline{AC}|^2 = (5)^2 = 25$

چونکہ $|\overline{AD}|^2 + |\overline{DC}|^2 = |\overline{AC}|^2$ اس لیے $\angle ADC = 90°$

اسی طرح $\angle ABC = \angle BCD = \angle DAB = 90°$

نتیجتاً، نقاط A، B، C اور D ایک مستطیل بناتے ہیں۔

(c) دو نقاط کے درمیان فاصلہ فارمولا کی مدد سے دیے ہوئے غیر ہم خط چار نقاط سے متوازی الاضلاع کی شکل بنانا

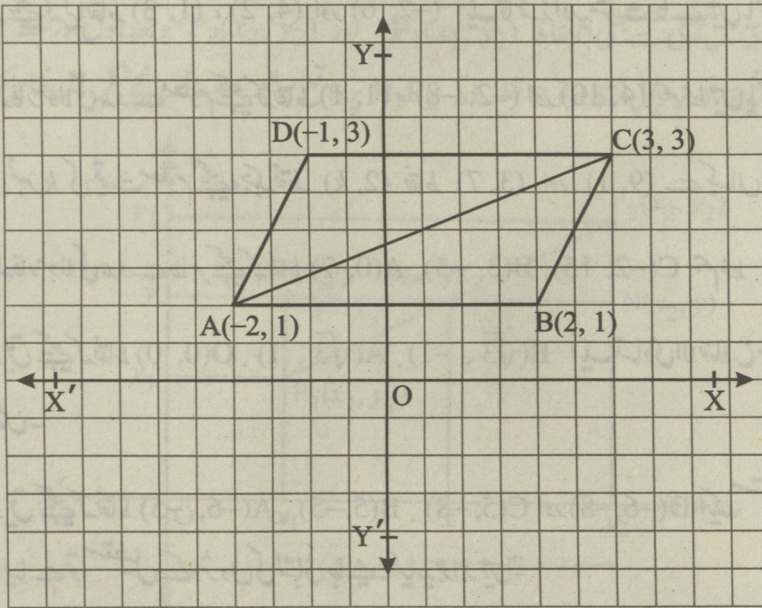
تعریف: مستوی میں چار غیر ہم خط نقاط سے بنائی ہوئی بند شکل متوازی الاضلاع کہلاتی ہے اگر

(i) شکل کے بالمقابل اضلاع کی لمبائی برابر ہو۔

(ii) شکل کے بالمقابل اضلاع باہم متوازی ہوں۔

مثال

ظاہر کیجیے کہ نقاط A(−2, 1)، B(2, 1)، C(3, 3) اور D(−1, 3) ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

حل

فاصلہ فارمولا کی مدد سے اضلاع کی لمبائی چونکہ

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\overline{CD}| = \sqrt{(3+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4^2 + 0} = \sqrt{16} = 4$$

$|\overline{AD}| = \sqrt{(-1+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

اور $|\overline{BC}| = \sqrt{(3-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

چونکہ $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = \sqrt{5}$ اور $|\overline{AB}| = |\overline{CD}| = 4$

مشق 9.2

1۔ تحقیق کیجیے کہ کیا نقاط (2– ,5)، (4 ,5) اور (1 ,4–) ایک متساوی الاضلاع مثلث کے کونے ہیں یا متساوی الساقین مثلث کے؟

2۔ بتائیے کیا نقاط (1 ,1–)، (4 ,5)، (2– ,2) اور (1 ,4–) ایک مربع شکل بناتے ہیں یا نہیں؟

3۔ فیصلہ کیجیے کہ کیا نقاط (3 ,1)، (2 ,4) اور (6 ,2–) ایک قائمہ زاویہ مثلث بناتے ہیں یا نہیں؟

4۔ فاصلہ فارمولا کی مدد سے معلوم کیجیے کہ نقاط (1 ,1)، (8– ,2–) اور (10 ,4) ہم خط ہیں یا نہیں۔

5۔ حقیقی نمبر k کی قیمت معلوم کیجیے، جبکہ نقطہ $(2, k)$ نقاط (7 ,3) اور (1 ,9) سے یکساں فاصلہ پر ہے۔

6۔ فاصلہ فارمولا کی مدد سے ظاہر کیجیے کہ نقاط A(0, 7)، B(3, –5)، C(–2, 15) ہم خط ہیں۔

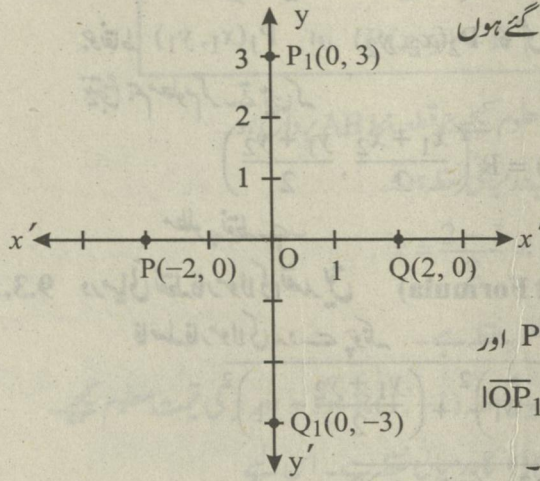
7۔ تصدیق کیجیے کہ نقاط O(0, 0)، $A(\sqrt{3}, 1)$، $B(\sqrt{3}, -1)$ ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں یا نہیں۔

8۔ تصدیق کیجیے کہ نقاط A(–6, –5)، B(5,–5)، C(5, –8) اور D(–6,–8) ایک مستطیل بناتے ہیں۔ اگر ایسا ہے تو مستطیل کے وتروں کی لمبائی جانیے۔ کیا یہ برابر ہیں؟

9۔ تصدیق کیجیے کہ نقاط M(–1, 4)، N(–5, 3)، P(1 – 3) اور Q(5, –2) ایک متوازی الاضلاع کے کونے ہیں۔

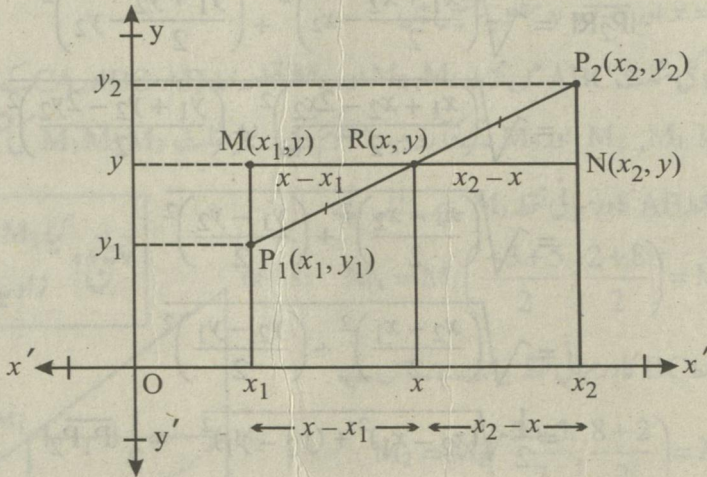
10۔ ایک دائرہ کے قطر کی لمبائی بتائیے جس کا مرکزی نقطہ C(–3, 6) ہے اور نقطہ P(1, 3) دائرہ پر واقع ہے۔

9.3 درمیانی نقطہ فارمولا (Mid-Point Formula)

9.3.1 درمیانی نقطہ کے تصور کی پہچان (Recognition of the Mid-Point)

اگر دو نقاط $P(-2, 0)$ اور $Q(2, 0)$ دیے گئے ہوں جو x-محور (x-axis) پر واقع ہیں تو مبدا $O(0, 0)$ ان کا درمیانی نقطہ ہے۔ چونکہ سامنے دی ہوئی شکل میں $|\overline{OP}| = 2 = |\overline{OQ}|$ اور نقاط P ،O اور Q ہم خط ہیں۔

اسی طرح مبدا $O(0, 0)$ نقاط $P_1(0, 3)$ اور $Q_1(0, -3)$ کا درمیانی نقطہ ہے چونکہ $|\overline{OP_1}| = 3 = |\overline{OQ_1}|$ اور نقاط P_1 ، O اور Q_1 ایک خط y-ایکسز پر واقع ہیں۔

9.3.2 مستوی میں کسی بھی دو نقاط کے درمیانی نقطہ کی پہچان

اگر مستوی میں کوئی سے بھی دو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ موجود ہوں اور نقطہ $R(x, y)$ دیے ہوئے نقاط P_1 اور P_2 کا درمیانی نقطہ ہو تو R قطعہ خط P_1P_2 پر واقع ہوگا۔ جیسا کہ نیچے شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

اگر قطعہ خط MN جو خط x-ایکسز کے متوازی ہے اور نقطہ $R(x, y)$ قطعہ خط MN پر M اور N کا درمیانی نقطہ ہے:

تو
$$x_2 - x = x - x_1$$

$$\Rightarrow \quad 2x = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

اسی طرح
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

پس R نقاط M اور N کا درمیانی نقطہ ہے۔ اس لیے

$$R(x, y) = R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

جو نقاط $P_1(x_1, y_1)$ اور $P_2(x_2, y_2)$ کا بھی درمیانی نقطہ ہے۔

نتیجتاً ہم معلوم کرتے ہیں کہ

$$R(x, y) = R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مطلوبہ نقطہ ہے۔

9.3.3 درمیانی نقطہ فارمولا کی تصدیق (Verification of Mid-Point Formula)

فاصلہ فارمولا کی مدد سے چونکہ

$$|\overline{P_1R}| = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}|\overline{P_1P_2}|$$

اور

$$|\overline{P_2R}| = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2 - 2x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 - 2y_2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{1}{2}|\overline{P_1P_2}|$$

پس

$$\Rightarrow \quad |\overline{P_2R}| = |\overline{P_1R}| = \frac{1}{2}|\overline{P_1P_2}|$$

مطلوبہ تصدیق ہو جاتی ہے کہ نقطہ $R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ قطعہ خط P_1RP_2 کا درمیانی نقطہ ہے۔

چونکہ $|\overline{P_1R}| + |\overline{P_2R}| = |\overline{P_1P_2}|$ اس لیے نقاط P_1، P_2 اور R قطعہ خط P_1P_2 پر واقع ہیں۔

اگر مستوی میں کوئی سے بھی دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ ہوں تو ان کا درمیانی نقطہ $R(x, y)$ قطعہ خط PQ پر واقع ہوگا۔ اور

$$R(x, y) = R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

مثال 1 دو نقاط $A(2, 5)$ اور $B(-1, 1)$ کا درمیانی نقطہ معلوم کیجیے جو قطعہ خط AB پر واقع ہو۔

حل اگر $R(x, y)$ دیے ہوئے نقاط A اور B کا مطلوبہ درمیانی نقطہ ہو تو

$$x = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \quad ، \quad y = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

پس $R = R(x, y) = R\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ مطلوبہ نقطہ ہے۔

مثال 2 مستوی میں دو نقاط $P(2, 3)$ اور $Q(x, y)$ کا درمیانی نقطہ $R(1, -1)$ ہو تو x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل چونکہ $R(1, -1)$ نقاط $P(2, 3)$ اور $Q(x, y)$ کا درمیانی نقطہ ہے۔ اس لیے

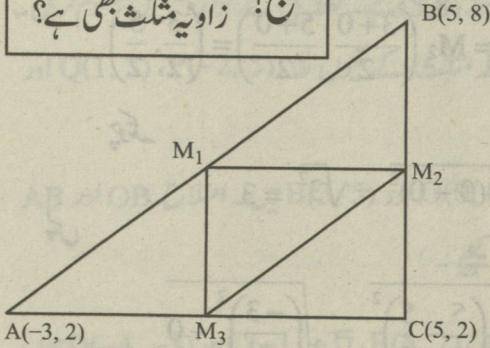
$$1 = \frac{x+2}{2} \quad ، \quad -1 = \frac{y+3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 = x + 2 \quad \Big| \quad \Rightarrow \quad -2 = y + 3$$

$$\Rightarrow \quad x = 0 \quad \Big| \quad \Rightarrow \quad y = -5$$

پس $x = 0$ اور $y = -5$ مطلوبہ قیمتیں ہیں۔

مثال 3 نیچے دکھائی گئی مثلث ABC میں نقاط M_1, M_2 اور M_3 قطعہ خط AB، BC اور CA کے بالترتیب درمیانی نقاط ہوں تو نقاط M_1، M_2 اور M_3 کے کوآرڈینیٹ معلوم کیجیے۔ نیز مثلث $M_1 M_2 M_3$ کی قسم بھی واضح کیجیے۔

چیلنج! کیا $\triangle M_1 M_2 M_3$ قائمہ زاویہ مثلث بھی ہے؟

حل چونکہ قطعہ خط AB کا درمیانی نقطہ M_1 ہے۔ اس لیے

$$M_1 = M_1\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = M_1(1, 5)$$

چونکہ قطعہ خط BC کا درمیانی نقطہ M_2 ہے۔ اس لیے

$$M_2 = M_2\left(\frac{5+5}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = M_2(5, 5)$$

چونکہ قطعہ خط AC کا درمیانی نقطہ M_3 ہے۔ اس لیے

$$M_3 = M_3\left(\frac{5-3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = M_3(1, 2)$$

مثلث $M_1M_2M_3$ کے اضلاع کی لمبائیاں:

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(5-1)^2+(5-5)^2} = \sqrt{4^2+0} = 4 \qquad \ldots\ldots (i)$$

$$|\overline{M_2M_3}| = \sqrt{(1-5)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \ldots\ldots (ii)$$

$$|\overline{M_1M_3}| = \sqrt{(1-1)^2+(2-5)^2} = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3 \qquad \ldots\ldots (iii)$$

چونکہ مثلث $M_1M_2M_3$ کے اضلاع کی لمبائیاں 4 ,5 اور 3 ایک دوسرے سے مختلف ہیں اس لیے مثلث $M_1M_2M_3$ ایک مختلف الاضلاع مثلث ہے۔

مثال 4 اگر مستوی میں دیے ہوئے تین نقاط $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ اور $B(3, 5)$ کی مناسبت سے M_1 قطعہ خط AB کا درمیانی نقطہ اور M_2 قطعہ خط OB کا درمیانی نقطہ ہو تو

ثابت کیجیے کہ

$$|\overline{M_1M_2}| = \frac{1}{2}\,|\overline{OA}|$$

حل

قطعہ خط AB کا درمیانی نقطہ M_1 ہے۔

اس لیے درمیانی نقطہ فارمولا کی مدد سے

$$M_1 = M_1\left(\frac{3+3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

چونکہ قطعہ خط OB کا درمیانی نقطہ M_2 ہے اس لیے

$$M_2 = M_2\left(\frac{3+0}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

چونکہ

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(3-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

پس

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+0}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4}+0} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\,|\overline{OA}|$$

اہم نوٹ

اگر دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کا درمیانی نقطہ $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ہو تو

(i) M دونوں نقاط P اور Q سے یکساں فاصلے پر ہے۔ یعنی $|\overline{PM}| = |\overline{MQ}|$

(ii) M دونوں نقاط کے ملانے والے قطعہ خط PQ پر واقع ہے۔

(iii) ہر نقطہ R جو مستوی میں نقاط P اور Q سے یکساں فاصلے پر ہو ضروری نہیں کہ وہ ان کا درمیانی نقطہ بھی ہو۔

جیسا کہ نقطہ $R(0,1)$ نقاط $P(-3, 0)$ اور $Q(3, 0)$ سے یکساں فاصلہ پر ہے۔ لیکن $R(0, 1)$ نقاط P اور Q کا درمیانی نقطہ نہیں۔ مثلاً

$$|\overline{RQ}| = \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$|\overline{RP}| = \sqrt{(0+3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

اور نقاط P اور Q کا درمیانی نقطہ $R(0, 1)$ نہیں بلکہ $R(0, 0)$ درمیانی نقطہ ہے اور $(0, 0) \neq (0, 1)$

(iv) یاد رہے کہ دو نقاط کا درمیانی نقطہ صرف ایک ہی نقطہ ہو سکتا ہے۔

مشق 9.3

1۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کو ملانے سے قطعہ خط کا درمیانی نقطہ معلوم کیجیے۔

(a) $A(9, 2), B(7, 2)$ (b) $A(2, -6), B(3, -6)$

(c) $A(-8, 1), B(6, 1)$ (d) $A(-4, 9), B(-4, -3)$

(e) $A(3, -11), B(3, -4)$ (f) $A(0, 0), B(0, -5)$

2۔ قطعہ خط PQ کا کونا نقطہ $P(-3,6)$ پر ہے اور اس کا درمیانی نقطہ $(5,8)$ ہے۔ نقطہ Q کے کوآرڈینیٹس معلوم کریں۔

3۔ ثابت کیجیے کہ ایک قائمہ زاویہ مثلث کے وتر کا درمیانی نقطہ مثلث کے تینوں نقاط $P(-2, 5)$، $Q(1, 3)$ اور $R(-1, 0)$ سے یکساں فاصلہ پر ہے۔

4۔ مستوی میں مثلث کے تینوں کونوں کے نقاط $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ اور $B(3, 5)$ ہیں۔ اضلاع OB اور AB کے درمیانی نقاط M_1 اور M_2 ہیں۔ $|\overline{M_1M_2}|$ معلوم کیجیے۔

5۔ ایک متوازی الاضلاع ABCD جس میں نقاط $A(1, 2)$، $B(4, 2)$، $C(-1, -3)$ اور $D(-4, -3)$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ ABCD کے وتر ایک دوسرے کو باہم دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔

(اشارہ: متوازی الاضلاع کے وتر ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں)

6۔ ایک مثلث PQR کے نقاط P(4, 6)، Q(−2, −4) اور R(−8, 2) ہوں تو ثابت کیجیے کہ اضلاع PR اور QR کے درمیانی نقاط کو ملانے والے قطعہ خط کی لمبائی $\frac{1}{2}|\overline{PQ}|$ کی لمبائی کے برابر ہے۔

اعادہ مشق 9

1۔ دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب کا انتخاب کیجیے۔

(i) نقاط (0, 0) اور (1, 1) کے درمیان فاصلہ.......... ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\sqrt{2}$

(ii) نقاط (1, 0) اور (0, 1) کا درمیانی فاصلہ.......... ہے۔

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) 2

(iii) نقاط (0, 0) اور (2, 2) کا درمیانی نقطہ.......... ہے۔

(a) (1, 1) (b) (1, 0) (c) (0, 1) (d) (−1, −1)

(iv) نقاط (2, −2) اور (−2, 2) کا درمیانی نقطہ.......... ہے۔

(a) (2, 2) (b) (−2, −2) (c) (0, 0) (d) (1, 1)

(v) ایک مثلث جس کے تینوں اضلاع کی لمبائی برابر ہو وہ .... کہلاتی ہے۔

(a) متساوی الساقین (b) مختلف الاضلاع

(c) مساوی الاضلاع (d) ان میں سے نہیں

(vi) ایک ایسی مثلث جس کے تمام اضلاع کی لمبائی برابر ہو وہ .... کہلاتی ہے۔

(a) متساوی الساقین (b) مختلف الاضلاع

(c) مساوی الاضلاع (d) ان میں سے نہیں

2۔ مندرجہ ذیل جملوں میں سے کون سے درست اور کون سے غلط ہیں؟

(i) ایک خط کے دو سرے ہوتے ہیں۔ ....

(ii) ایک قطعہ خط کا ایک سرا ہوتا ہے۔ ....

(iii) ایک مثلث تین ہم خط نقاط سے بنتی ہے۔ ....

(iv) ایک مثلث کے ہر ضلع پر دو ہم خط راسی نقاط ہوتے ہیں۔ ....

(v) ایک مستطیل کے ہر ضلع کے دو کونے ہم خط ہوتے ہیں۔ ....

(vi) تمام نقاط جو x۔محور پر ہوتے ہیں ہم خط ہوتے ہیں۔

(vii) مبدا ہی ایک ایسا نقطہ ہے جو x۔محور اور y۔محور دونوں کا ہم خط نقطہ ہے۔

3۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کے درمیان فاصلہ معلوم کریں۔

(i) (6, 3), (3, −3) (ii) (7, 5), (1, −1)

(iii) (0, 0), (−4, −3)

4۔ مندرجہ ذیل نقاط کے جوڑوں کا درمیانی نقطہ بتائیے۔

(i) (6, 6), (4, −2) (ii) (−5, −7), (−7, −5)

(iii) (8, 0), (0, −12)

5۔ مندرجہ ذیل کی تعریف کیجیے۔

(i) کوآرڈینیٹ جیومیٹری (ii) ہم لائن نقاط (iii) غیر ہم لائن نقاط

(iv) متساوی الاضلاع مثلث (v) مختلف الاضلاع مثلث (vi) متساوی الساقین مثلث

(vii) قائمہ زاویہ مثلث (viii) مربع

خلاصہ

☆ اگر $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ دو نقاط ہوں اور حقیقی نمبر d اِن کے درمیان فاصلہ کو ظاہر کرتا ہو

تو $$d = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

☆ غیر ہم خط نقاط کا تصور تین اور چار ضلعی اشکال کو جیومیٹری میں زیرِ بحث لانے کی وجہ بنتا ہے۔

☆ مستوی میں تین نقاط P ، Q اور R ہم خط ہوں گے اگر $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| = |\overline{PR}|$

☆ تین نقاط P، Q اور R مثلث کی تشکیل کرتے ہیں اگر وہ غیر ہم خط ہوں۔

یا $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| > |\overline{PR}|$

☆ اگر $|\overline{PQ}| + |\overline{QR}| < |\overline{PR}|$ تو نقاط P، Q اور R سے یکتا مثلث نہیں بنائی جاسکتی۔

☆ مثلثوں کی مختلف اقسام، متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، قائمہ زاویہ اور مختلف الاضلاع مثلثان اس یونٹ میں زیرِ بحث لائی گئی ہیں۔

☆ اسی طرح چار ضلعی اشکال مربع ، مستطیل اور متوازی الاضلاع کو زیرِ بحث لایا گیا ہے۔

یونٹ 10

متماثل مثلثان

(CONGRUENT TRIANGLES)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

10.1 متماثل مثلثان (Congruent Triangles)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ثابت کر سکیں کہ دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔

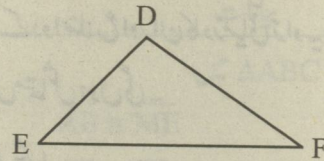
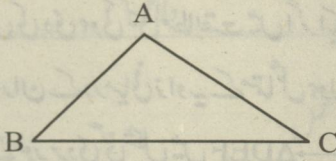
☆ ثابت کر سکیں کہ دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔(ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض)

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر دو قائمہ زاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔ (وتر۔ضلع ≅ وتر۔ضلع)

10.1 متماثل مثلثان

تعارف

اس یونٹ سے متعلق مسئلوں کو ثابت کرنے سے پیشتر ہم دو مثلثوں کے درمیان (1-1) مطابقت اور ان کی مماثلت کی وضاحت کریں گے۔(1-1) مطابقت کے لیے نشان ⟵⟶ استعمال کیا جاتا ہے۔ علاوہ ازیں ض۔ز۔ض موضوعہ

(S.A.S. Postulate) بیان کریں گے۔

دی گئی دو مثلثان مثلاً ΔABC اور ΔDEF میں جو چھ ممکنہ (1 - 1) مطابقتیں قائم کی جا سکتی ہیں ان میں سے ایک مطابقت کی وضاحت درج ذیل ہے۔

$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ کا مطلب یہ ہے کہ

($\angle A$ اور $\angle D$ باہم مطابق زاویے ہیں)	$\angle A \longleftrightarrow \angle D$
($\angle B$ اور $\angle E$ باہم مطابق زاویے ہیں)	$\angle B \longleftrightarrow \angle E$
($\angle C$ اور $\angle F$ باہم مطابق زاویے ہیں)	$\angle C \longleftrightarrow \angle F$
($\overline{AB}$ اور $\overline{DE}$ باہم مطابق اضلاع ہیں)	$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE}$
($\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ باہم مطابق اضلاع ہیں)	$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF}$
($\overline{CA}$ اور $\overline{FD}$ باہم مطابق اضلاع ہیں)	$\overline{CA} \longleftrightarrow \overline{FD}$

مثلثوں کی مماثلت (Congruency of Triangles)

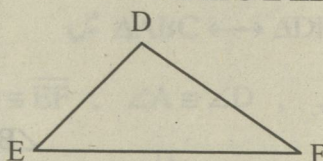
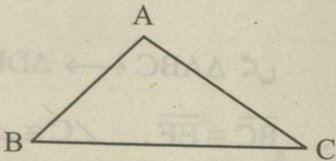
دو مثلثیں متماثل (علامت $\cong$) کہلاتی ہیں اگر ان کے درمیان کم از کم ایک (1-1) مطابقت ایسی قائم کی جا سکے جس میں باہم مطابقت رکھنے والے اضلاع اور زاویے متماثل ہوں۔ یعنی

اگر مطابقت $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ (تینوں متناظرہ اضلاع)

اور $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ (تینوں متناظرہ زاویے)

تو $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

نوٹ

(i) یہ مثلثیں مذکورہ بالا (1 -1) مطابقت کے انتخاب کے لحاظ سے متماثل ہیں۔

(ii) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

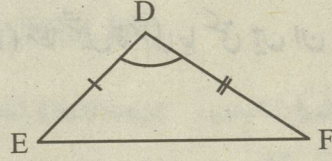
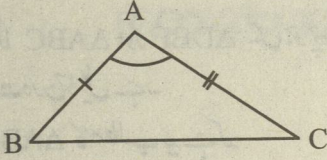
(iii) $\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \Delta DEF \cong \Delta ABC$

(iv) اگر $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ اور $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ تو $\Delta DEF \cong \Delta PQR$

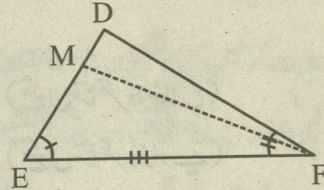
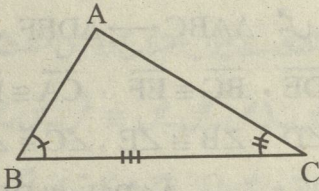
ض۔ز۔ض کا موضوعہ **(S.A.S Postulate)**

دو مثلثوں کی دی ہوئی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دوسری مثلث کے متناظرہ دو اضلاع اور ان کے درمیانی زاویہ کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔

مثال کے طور پر دی گئی شکل میں $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں

اگر
$$\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \angle A \cong \angle D \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{cases}$$

تو $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (S.A.S. Postulate)

مسئلہ 10.1.1

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور کوئی دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔ (ز۔ض۔ز $\cong$ ز۔ض۔ز)

معلوم $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں

$\angle B \cong \angle E$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ، $\angle C \cong \angle F$

مطلوب $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل فرض کیجیے $\overline{AB} \not\cong \overline{DE}$

$\overline{DE}$ پر ایک نقطہ M اس طرح لیں کہ $\overline{AB} \cong \overline{ME}$

نقاط M اور F کو ملائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta MEF$ میں	
$\overline{AB} \cong \overline{ME}$ ...... (i)	عمل
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ...... (ii)	معلوم
$\angle B \cong \angle E$ ...... (iii)	معلوم
$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta MEF$	ض۔ز۔ض موضوعہ
پس $\angle C \cong \angle MFE$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
لیکن $\angle C \cong \angle DFE$	معلوم
$\therefore \quad \angle DFE \cong \angle MFE$	دونوں میں سے ہر ایک $\angle C$ کے متماثل ہے (ثابت شدہ)
لیکن یہ محال ہے اور صرف اس وقت ممکن ہے جب D اور M منطبق ہوں یعنی $D \cong M$ اور $\overline{ME} \cong \overline{DE}$	
پس $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ...... (iv)	$\overline{AB} \cong \overline{ME}$ (عمل) اور $\overline{ME} \cong \overline{DE}$ (ثابت شدہ)
لہٰذا (ii)، (iii) اور (iv) کی رو سے	
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	ض۔ز۔ض موضوعہ

نتیجہ صریح

دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور کوئی دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔ (ض۔ز۔ز ≅ ض۔ز۔ز)

معلوم مطابقت $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں

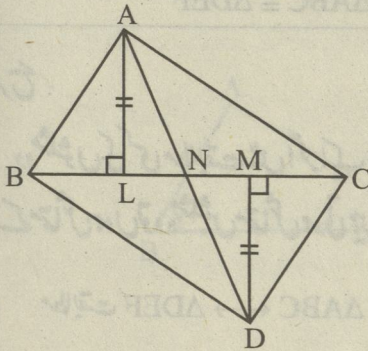
$$\overline{BC} \cong \overline{EF} \;,\; \angle A \cong \angle D \;,\; \angle B \cong \angle E$$

مطلوب $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں	
$\angle B \cong \angle E$	معلوم
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$	معلوم
لیکن مثلث کے تینوں اندرونی زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔	
$\therefore$ $\angle C \cong \angle F$	$\angle B \cong \angle E$, $\angle A \cong \angle D$ (معلوم)
لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	ز۔ض۔ز $\cong$ ز۔ض۔ز

مثال

اگر ΔABC اور ΔDCB مشترک قاعدہ $\overline{BC}$ کے لحاظ سے ایک دوسری کی مخالف اطراف میں اس طرح واقع ہوں کہ $\overline{AL} \perp \overline{BC}$، $\overline{DM} \perp \overline{BC}$ اور $\overline{AL} \cong \overline{DM}$ تو ثابت کیجیے کہ $\overline{BC}$ تنصیف کرتا ہے $\overline{AD}$ کی۔

معلوم ΔABC اور ΔDCB مشترک قاعدہ $\overline{BC}$ کے لحاظ سے ایک دوسری کی مخالف اطراف میں اس طرح واقع ہیں کہ
$\overline{AL} \perp \overline{BC}$، $\overline{DM} \perp \overline{BC}$، $\overline{AL} \cong \overline{DM}$
$\overline{BC}$ نقطہ N پر $\overline{AD}$ کو قطع کرتا ہے۔

مطلوب $\overline{AN} \cong \overline{DN}$

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ALN \longleftrightarrow \Delta DMN$ میں	
$\overline{AL} \cong \overline{DM}$	معلوم
$\angle ALN \cong \angle DMN$	ہر ایک زاویہ قائمہ ہے۔
$\angle ANL \cong \angle DNM$	راسی زاویے
$\therefore$ $\Delta ALN \cong \Delta DMN$	ض۔ز۔ز $\cong$ ض۔ز۔ز
لہٰذا $\overline{AN} \cong \overline{DN}$	مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

مشق 10.1

1۔ دی گئی شکل میں

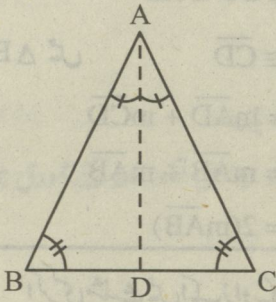
$\overline{AB} \cong \overline{CB}$ اور $\angle A \cong \angle C$ $(\angle 1 \cong \angle 2)$

ثابت کریں کہ $\Delta ABD \cong \Delta CBE$

2۔ کسی زاویہ کی ناصف شعاع پر واقع ایک نقطہ سے زاویہ کے بازوؤں پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کریں کہ یہ عمود لمبائی میں برابر ہیں۔

3۔ ΔABC میں $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف نقطہ I پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ثابت کریں کہ نقطہ I مثلث ABC کے تینوں اضلاع سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

مسئلہ 10.1.2

اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔

معلوم ΔABC میں $\angle B \cong \angle C$

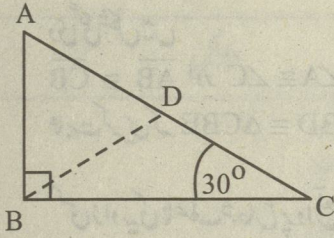
مطلوب $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

عمل $\angle A$ کا ناصف کھینچا، جس نے $\overline{BC}$ کو نقطہ D پر قطع کیا۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ABD \longleftrightarrow \Delta ACD$ میں	
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	مشترک
$\angle B \cong \angle C$	معلوم
$\angle BAD \cong \angle CAD$	عمل
لہٰذا $\Delta ABD \cong \Delta ACD$	ض۔ز۔ز ≅ ض۔ز۔ز
پس $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

مثال 1 اگر کسی قائمۃ الزاویہ مثلث کا ایک زاویہ 30° ہو تو وتر اس زاویہ کے مخالف ضلع کی لمبائی سے دوگنا ہوتا ہے۔

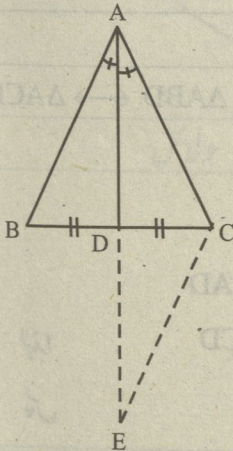
معلوم ΔABC میں $m\angle B = 90°$ اور $m\angle C = 30°$

مطلوب $m\overline{AC} = 2m\overline{AB}$

عمل نقطہ B پر $\angle CBD$ برابر 30° بنائیں۔

فرض کریں $\overline{BD}$ ضلع AC کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
ΔABD میں	
$m\angle A = 60°$	$m\angle ABC = 90°$ اور $m\angle C = 30°$
$m\angle ABD = m\angle ABC - m\angle CBD$	
$= 60°$	$m\angle ABC = 90°$ (معلوم)، $m\angle CBD = 30°$ (عمل)
$\therefore \quad \angle ADB = 60°$	ΔABD کے تینوں زاویوں کی مقداروں کا مجموعہ $= 180°$
اس لیے ΔABD مساوی الاضلاع ہے۔	مثلث کا ہر ایک زاویہ $= 60°$
یعنی $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$	مساوی الاضلاع مثلث کے اضلاع
ΔBCD میں $\overline{BD} \cong \overline{CD}$	$\angle C = \angle CBD$ (ہر ایک زاویہ $= 30°$)
لہٰذا $m\overline{AC} = m\overline{AD} + m\overline{CD}$	
$= m\overline{AB} + m\overline{AB}$	$m\overline{AD} \cong m\overline{AB}$ اور $m\overline{CD} \cong m\overline{BD} \cong m\overline{AB}$
$= 2(m\overline{AB})$	

مثال 2 اگر کسی مثلث میں ایک زاویہ کا ناصف مخالف ضلع کی تنصیف کرے تو وہ مساوی الساقین مثلث ہوگی۔

معلوم ΔABC میں $\angle A$ کا ناصف مخالف ضلع $\overline{BC}$ کی نقطہ D پر تنصیف کرتا ہے اور $\overline{BD} \cong \overline{CD}$

مطلوب $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ یعنی ΔABC مساوی الساقین ہے۔

عمل $\overline{AD}$ کو D سے پرے E تک اتنا بڑھائیں کہ $\overline{ED} \cong \overline{AD}$

نقطہ C کو نقطہ E سے ملائیں۔

ثبوت

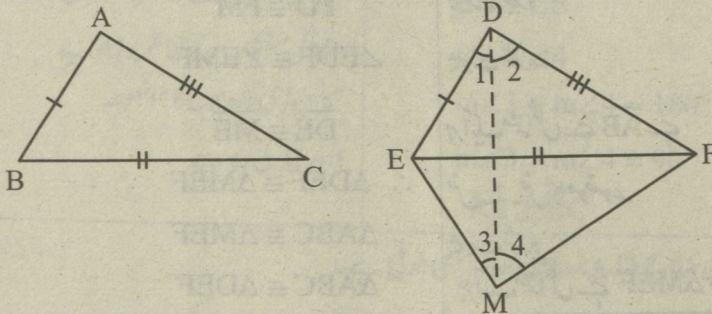
بیانات	دلائل
$\Delta ADB \longleftrightarrow \Delta EDC$	
$\overline{AD} \cong \overline{ED}$	عمل
$\angle ADB \cong \angle EDC$	راسی زاویے
$\overline{BD} \cong \overline{CD}$	معلوم
$\therefore \quad \Delta ADB \cong \Delta EDC$	ض۔ز۔ض موضوعہ
$\therefore \quad \overline{AB} \cong \overline{EC}$ I	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
اور $\angle BAD \cong \angle E$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
لیکن $\angle BAD \cong \angle CAD$	معلوم ($\overline{AD}$ زاویہ A کا ناصف ہے)
$\angle E \cong \angle CAD$	ہر ایک زاویہ $\angle BAD$ کے متماثل ہے۔
ΔACE میں	
$\overline{AC} \cong \overline{EC}$ II	$\angle E \cong \angle CAD$ (ثابت شدہ)
لہذا $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	(I) اور (II) کی رو سے

مشق 10.2

1۔ ثابت کریں کہ متماثل الاضلاع مثلث کے کوئی بھی دو وسطانیے متماثل ہوتے ہیں۔

2۔ ثابت کریں کہ ایک نقطہ جو کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔

مسئلہ 10.1.3

اگر دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں (ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض)

معلوم $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ اور $\overline{CA} \cong \overline{FD}$

مطلوب $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل فرض کیا کہ ΔDEF میں ضلع $\overline{EF}$ باقی دونوں اضلاع میں سے کسی سے چھوٹا نہیں ہے۔ $\overline{EF}$ پر ΔDEF کے ساتھ ΔMEF اس طرح بنائی کہ $\angle FEM \cong \angle B$ اور $\overline{ME} \cong \overline{AB}$ نقطہ D کو نقطہ M سے ملایا۔ مندرجہ بالا اشکال کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$ ، $\angle 2$ ، $\angle 3$ اور $\angle 4$ رکھے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta MEF$ میں	
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$	معلوم
$\angle B \cong \angle FEM$	عمل
$\overline{AB} \cong \overline{ME}$	عمل
$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta MEF$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
اور $\overline{CA} \cong \overline{FM}$ ...... (i)	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
$\overline{CA} \cong \overline{FD}$ ...... (ii)	معلوم
$\therefore \quad \overline{FM} \cong \overline{FD}$	(i)اور (ii) کی رو سے
ΔFDM میں	
$\angle 2 \cong \angle 4$ ...... (iii)	$\overline{FM} \cong \overline{FD}$ (ثابت شدہ)
اسی طرح $\angle 1 \cong \angle 3$ ...... (iv)	
$\therefore \quad m\angle 2 + m\angle 1 = m\angle 4 + m\angle 3$	نتائج (iii) اور (iv) سے
$\therefore \quad m\angle EDF = m\angle EMF$	
اب $\Delta DEF \longleftrightarrow \Delta MEF$ میں	
$\overline{FD} \cong \overline{FM}$	ثابت شدہ
اور $\angle EDF \cong \angle EMF$	ثابت شدہ
$\overline{DE} \cong \overline{ME}$	ہر ایک متماثل ہے $\overline{AB}$ ہے
پس $\therefore \quad \Delta DEF \cong \Delta MEF$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
اور $\Delta ABC \cong \Delta MEF$	ثابت شدہ
لہٰذا $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	ہر ایک متماثل ہے ΔMEF (ثابت شدہ)

صریح نتیجہ

اگر دو مساوی الساقین مثلثیں مشترک قاعدہ کے ایک ہی طرف تشکیل دی گئی ہوں تو ان کے راسوں میں سے گزرنے والا خط ان کے مشترکہ قاعدہ کا عمودی ناصف ہوگا۔

معلوم ΔABC اور ΔDBC مشترکہ قاعدہ $\overline{BC}$ کے ایک ہی طرف اس طرح تشکیل دی گئی ہیں کہ

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{DB} \cong \overline{DC}$

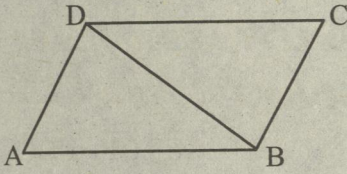
اور قطعہ خط AD کو نقطہ D سے پرے بڑھانے پر $\overline{BC}$ کو E پر ملتا ہے۔

مطلوب $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ اور $\overline{BE} \cong \overline{CE}$

ثبوت

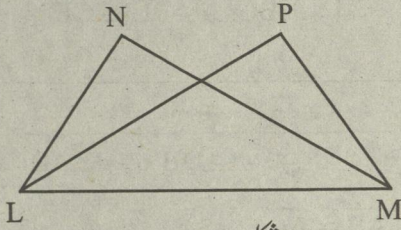
بیانات	دلائل
$\Delta ADB \longleftrightarrow \Delta ADC$ میں	
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	معلوم
$\overline{DB} \cong \overline{DC}$	معلوم
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$	مشترک
$\therefore$ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$	ض۔ض۔ض $\cong$ ض۔ض۔ض
$\therefore$ $\angle 1 \cong \angle 2$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
$\Delta ABE \longleftrightarrow \Delta ACE$ میں	
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	معلوم
$\angle 1 \cong \angle 2$	ثابت شدہ
$\overline{AE} \cong \overline{AE}$	مشترک
$\therefore$ $\Delta ABE \cong \Delta ACE$	ض۔ز۔ض موضوعہ
$\therefore$ $\overline{BE} \cong \overline{CE}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
$\angle 3 \cong \angle 4$ …… I	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
$\because$ $m\angle 3 + m\angle 4 = 180°$ ……II	سپلیمنٹری زاویوں کا موضوعہ
$\therefore$ $m\angle 3 = m\angle 4 = 90°$	I اور II کی رو سے
لہٰذا $\overline{AE} \perp \overline{BC}$	

صریح نتیجہ متساوی الاضلاع مثلث مساوی الزاویہ بھی ہوتی ہے۔

مشق 10.3

1۔ شکل (i) میں

$\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

ثابت کیجیے کہ $\angle A \cong \angle C$

اور $\angle ABC \cong \angle ADC$

شکل (i)

2۔ شکل (ii) میں

$\overline{LN} \cong \overline{MP}$, $\overline{MN} \cong \overline{LP}$

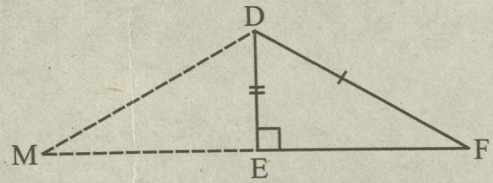
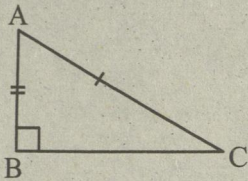
ثابت کیجیے کہ $\angle P \cong \angle N$ اور

$\angle NML \cong \angle PLM$

شکل (ii)

3۔ ثابت کیجیے کہ مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ کی تنصیف کرنے والا وسطانیہ راسی زاویہ کا ناصف اور قاعدہ پر عمود ہوتا ہے۔

مسئلہ 10.1.4

اگر دو قائمہ زاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی (وتر۔ضلع ≅ وتر۔ضلع)

معلوم $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, $\angle B \cong \angle E$ (قائمہ زاویے)

مطلوب $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

عمل $\overline{FE}$ کو نقطہ M تک اس طرح بڑھایا کہ $\overline{EM} \cong \overline{BC}$ ، نقطہ D کو نقطہ M سے ملایا۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$m\angle DEF + m\angle DEM = 180°$... (i)	سپلیمنٹری زاویے
اب $m\angle DEF = 90°$ ...... (ii)	معلوم
$\therefore$ $m\angle DEM = 90°$	نتائج (i) اور (ii) سے
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEM$ میں	
$\overline{BC} \cong \overline{EM}$	عمل
$\angle ABC \cong \angle DEM$	ہر ایک قائمہ ہے
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$	معلوم
$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEM$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
اور $\angle C \cong \angle M$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
$\overline{CA} \cong \overline{MD}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
لیکن $\overline{CA} \cong \overline{FD}$	معلوم
$\therefore$ $\overline{MD} \cong \overline{FD}$	ہر ایک متماثل ہے $\overline{CA}$ کے
ΔDMF میں	
$\angle F \cong \angle M$	$\overline{FD} \cong \overline{MD}$ (ثابت شدہ)
لیکن $\angle C \cong \angle M$	ثابت شدہ
$\therefore$ $\angle C \cong \angle F$	ہر ایک متماثل ہے $\angle M$ کے
$\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں	
$\overline{AB} \cong \overline{DE}$	معلوم
$\angle ABC \cong \angle DEF$	معلوم
$\angle C \cong \angle F$	ثابت شدہ
$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$	ض۔ز۔ز $\cong$ ض۔ز۔ز

مثال اگر کسی مثلث کے دو راسوں سے مخالف اضلاع پر گرائے گئے عمود متماثل ہوں تو وہ مثلث متماثل الساقین ہوگی۔

معلوم ΔABC میں

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ اور $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ اس طرح کہ $\overline{BD} \cong \overline{CE}$

مطلوب $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

ثبوت

دلائل	بیانات
	$\Delta BCD \longleftrightarrow \Delta CBE$ میں
معلوم (ہر ایک زاویہ $= 90°$)	$\angle BDC \cong \angle BEC$
مشترک وتر	$\overline{BC} \cong \overline{BC}$
معلوم	$\overline{BD} \cong \overline{CE}$
وتر۔ ضلع $\cong$ وتر۔ ضلع	$\therefore \quad \Delta BCD \cong \Delta CBE$
متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے	$\therefore \quad \angle BCD \cong \angle CBE$
	لہٰذا $\angle BCA \cong \angle CBA$
ΔABC میں $\angle BCA \cong \angle CBA$ (ثابت شدہ)	پس $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

مشق 10.4

شکل (i)

شکل (ii)

شکل (iii)

1۔ دی گئی شکل (i) کی ΔPAB میں
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$ اور $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ ہو تو
ثابت کریں کہ $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$ اور
$\angle APQ \cong \angle BPQ$

2۔ دی گئی شکل (ii) میں
$m\angle C = m\angle D = 90°$ اور $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
ثابت کریں کہ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ اور
$\angle BAC \cong \angle ABD$

3۔ دی گئی شکل (iii) میں
$m\angle B = m\angle D = 90°$ اور $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
ثابت کریں کہ ABCD ایک مستطیل ہے۔

اعادہ مشق 10

1۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) ایک شعاع کے 'دو' سرے ہوتے ہیں۔ ....

(ii) کسی مثلث میں صرف ایک ہی قائمہ زاویہ ہوسکتا ہے۔ ....

(iii) اگر تین نقاط ایک ہی خط پر واقع ہوں تو وہ ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔ ....

(iv) دو متوازی خطوط ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ ....

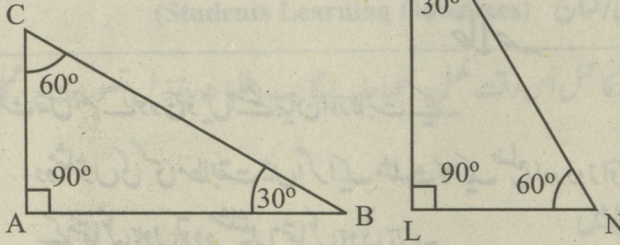
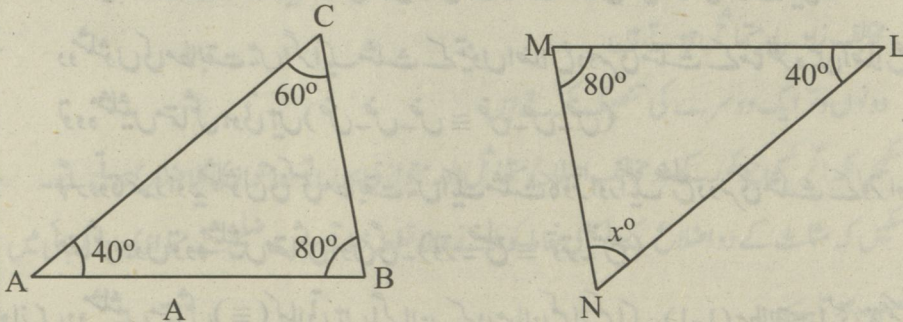
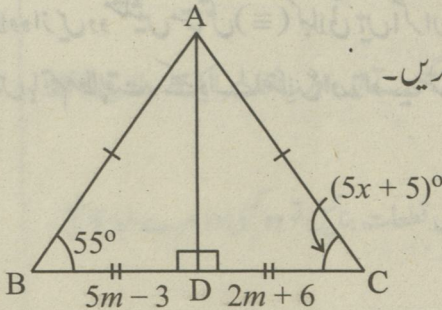
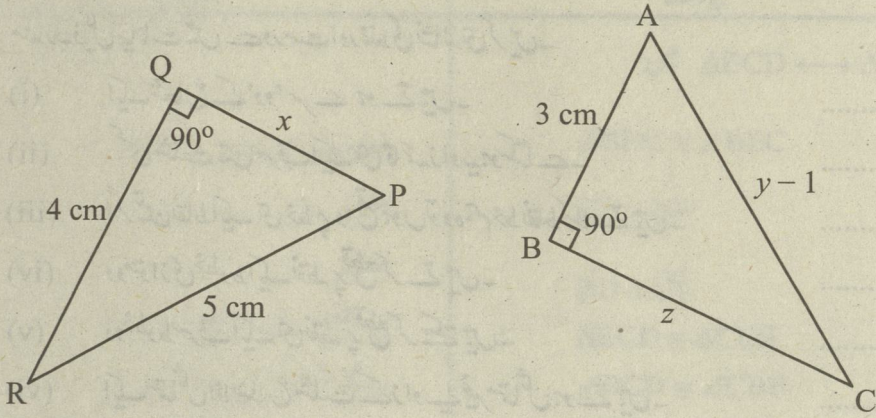
(v) دو خطوط صرف ایک ہی نقطہ پر قطع کر سکتے ہیں۔ ....

(vi) ایک متماثل الاضلاع مثلث کے زاویے غیر متماثل ہوتے ہیں۔ ....

2۔ اگر $\Delta ABC \cong \Delta LMN$ ہو تو

(i) $m\angle M \cong$ ____________

(ii) $m\angle N \cong$ ____________

(iii) $m\angle A \cong$ ____________

3۔ اگر $\Delta ABC \cong \Delta LMN$ تو نامعلوم x کی مقدار معلوم کریں

4۔ دی گئی متماثل مثلثوں سے نامعلوم m اور x کی مقدار معلوم کریں۔

5۔ اگر $\Delta PQR \cong \Delta ABC$ تو نامعلوم x, y اور z کی مقدار معلوم کریں۔

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے درج ذیل مسئلے بیان اور ثابت کیے۔

☆ دو مثلثوں کی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کا ایک ضلع اور دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ ضلع اور زاویوں کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔

☆ اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے مخالف اضلاع بھی متماثل ہوتے ہیں۔

☆ دو مثلثوں کی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے تینوں اضلاع دوسری مثلث کے متناظرہ تین اضلاع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں (ض۔ض۔ض $\cong$ ض۔ض۔ض)

☆ اگر دو قائمہ زاویہ مثلثوں کی کسی مطابقت میں ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے وتر اور متناظرہ ضلع کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔ (وتر۔ضلع $\cong$ وتر۔ضلع)

علاوہ ازیں دو مثلثیں متماثل ($\cong$) کہلاتی ہیں اگر ان کے درمیان کم از کم ایک (1-1) مطابقت ایسی قائم کی جا سکے جس میں باہم مطابقت رکھنے والے اضلاع اور زاویے متماثل ہوں۔

یونٹ 11

متوازی الاضلاع اور تکونی اشکال
(PARALLELOGRAMS AND TRIANGLES)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

11.1 (i) متوازی الاضلاع اشکال (Parallelograms)

(ii) مثلثیں (Triangles)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ثابت کر سکیں کہ ایک متوازی الاضلاع میں

(i) مخالف اضلاع متماثل ہوتے ہیں

(ii) مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں

(iii) دونوں وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی چوکور کے دو مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

☆ ثابت کر سکیں کہ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی اور لمبائی میں اس سے نصف ہوتا ہے۔

☆ ثابت کر سکیں کہ مثلث کے تینوں وسطانیے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر ایک وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔

☆ اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط ایک خط قاطع پر متماثل قطعات بنائیں تو وہ کسی دوسرے خط قاطع پر بھی متماثل قطعات بنائیں گے۔

تعارف

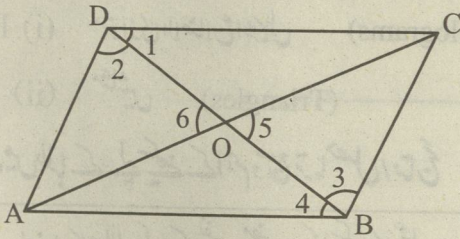
اس یونٹ کے مسئلے ثابت کرنے سے پیشتر طلبا کے لیے کارآمد ہوگا کہ وہ کثیر الاضلاع اشکال سے متعلق اصطلاحات مثلاً متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع، معین، ذوزنقہ، وغیرہ اور بالخصوص مثلثوں اور ان کی مماثلت کے بارے میں اپنی معلومات کو دہرا لیں۔

مسئلہ 11.1.1

ایک متوازی الاضلاع میں

(i) مخالف اضلاع باہم متماثل ہوتے ہیں

(ii) مخالف زاویے باہم متماثل ہوتے ہیں

(iii) دونوں وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

معلوم متوازی الاضلاع ABCD میں

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}, \overline{AB} \parallel \overline{DC}$ اور وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ باہم نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

مطلوب

(i) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

(ii) $\angle BAD \cong \angle BCD$, $\angle ABC \cong \angle ADC$

(iii) $\overline{OB} \cong \overline{OD}$, $\overline{OA} \cong \overline{OC}$

عمل شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$، $\angle 4$، $\angle 5$ اور $\angle 6$ رکھے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
(i) $\Delta ABD \longleftrightarrow \Delta CDB$ میں	
$\angle 4 \cong \angle 1$	متبادلہ زاویے
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$	مشترک
$\angle 2 \cong \angle 3$	متبادلہ زاویے

بیان	وجہ
$\therefore\ \Delta ABD \cong \Delta CDB$	ز۔ض۔ز ≅ ز۔ض۔ز
اس لیے $\overline{AB} \cong \overline{DC},\ \overline{AD} \cong \overline{BC}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
اور $\angle A \cong \angle C$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
(ii) اب	
$\angle 1 \cong \angle 4$ …… (a)	ثابت شدہ
$\angle 2 \cong \angle 3$ …… (b)	ثابت شدہ
$\therefore\ m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$	نتائج (a) اور (b) سے
یا $m\angle ADC = m\angle ABC$	
یا $\angle ADC \cong \angle ABC$	
اور $\angle BAD \cong \angle BCD$	(i) میں ثابت شدہ
(iii) $\Delta BOC \longleftrightarrow \Delta DOA$ میں	
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$	ثابت شدہ
$\angle 5 \cong \angle 6$	راسی زاویے
$\angle 3 \cong \angle 2$	ثابت شدہ
$\therefore\ \Delta BOC \cong \Delta DOA$	ز۔ز۔ض ≅ ز۔ز۔ض
لہٰذا $\overline{OC} \cong \overline{OA},\ \overline{OB} \cong \overline{OD}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

نتیجہ صریح متوازی الاضلاع کا ہر ایک وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

مثال ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے کسی ایک ضلع کے ساتھ بننے والے زاویوں کے ناصف باہم عمود ہوتے ہیں

معلوم متوازی الاضلاع ABCD میں $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, اور $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$\angle A$ اور $\angle B$ کے ناصف ایک دوسرے کو نقطہ E پر ملتے ہیں۔

مطلوب $m\angle E = 90°$

عمل شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$ اور $\angle 2$ رکھیں۔

ثبوت

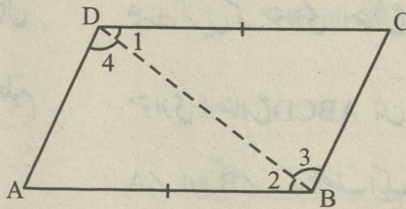
دلائل	بیانات
	$m\angle 1 + m\angle 2$
معلوم $m\angle 1 = \frac{1}{2} m\angle BAD$ اور $m\angle 2 = \frac{1}{2} m\angle ABC$	$= \frac{1}{2}(m\angle BAD + m\angle ABC)$
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (معلوم) اور ان کے خط قاطع AB کے ایک ہی طرف کے اندرونہ زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔	$= \frac{1}{2}(180^\circ)$
	$= 90^\circ$
$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ (ثابت شدہ)	لہٰذا ΔABE میں $m\angle E = 90^\circ$

مشق 11.1

1- اگر ایک متوازی الاضلاع کا ایک زاویہ 130° کا ہو تو اس کے باقی زاویوں کی مقداریں معلوم کیجیے۔

2- اگر ایک متوازی الاضلاع کے ایک ضلع کو بڑھانے سے بننے والا ایک بیرونی زاویہ 40° کا ہو تو اس کے اندرونی زاویوں کی مقداریں معلوم کیجیے۔

مسئلہ 11.1.2

اگر کسی چوکور کے دو مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

معلوم چوکور ABCD میں $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ اور $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

مطلوب ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

عمل نقطہ B کو D سے ملایا اور شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$ اور $\angle 4$ رکھے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ABD \longleftrightarrow \Delta CDB$ میں	
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$	معلوم
$\angle 2 \cong \angle 1$	متبادلہ زاویے
$\overline{BD} \cong \overline{BD}$	مشترک
$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta CDB$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
اب $\quad \angle 4 \cong \angle 3 \quad$ ...... (i)	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
اس لیے $\quad \overline{AD} \parallel \overline{BC} \quad$ ...... (ii)	(i) کی رو سے
$\overline{AD} = \overline{BC} \quad$ ...... (iii)	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
اور $\quad \overline{AB} \parallel \overline{DC} \quad$ ...... (iv)	معلوم
پس ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔	(ii) – (iv) کی رو سے

مشق 11.2

1- ثابت کیجیے کہ چوکور متوازی الاضلاع ہو گی اگر اس کے

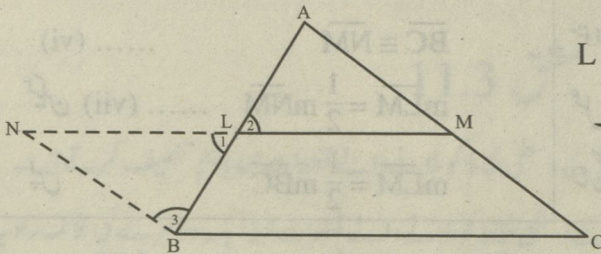
(a) مخالف زاویے متماثل ہوں

(b) وتر باہم تنصیف کریں

2- اگر کسی چوکور کے مخالف اضلاع باہم متماثل ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

مسئلہ 11 1.3

مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی اور لمبائی میں اس سے نصف ہوتا ہے۔

معلوم $\quad \Delta ABC$ میں $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ L ہے اور $\overline{AC}$ کا وسطی نقطہ M ہے۔

مطلوب $\overline{LM} \parallel \overline{BC}$ اور $m\overline{LM} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$

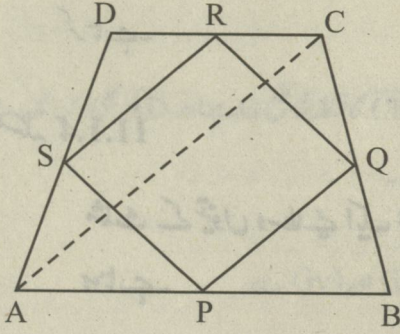
عمل نقطہ M اور L کو ملایا اور $\overline{ML}$ کو N تک اسطرح بڑھایا کہ $\overline{ML} \cong \overline{LN}$

N کو B سے ملایا اور شکل میں زاویوں کے نام $\angle 1$ ، $\angle 2$ اور $\angle 3$ رکھے۔

ثبوت

بیانات		دلائل
$\Delta BLN \longleftrightarrow \Delta ALM$ میں		
$\overline{BL} \cong \overline{AL}$		معلوم
$\angle 1 \cong \angle 2$		راسی زاویے
$\overline{NL} \cong \overline{ML}$		عمل
$\Delta BLN \cong \Delta ALM$	$\therefore$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
$\angle A \cong \angle 3$ ...... (i)	$\therefore$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
$\overline{NB} \cong \overline{AM}$ ...... (ii)		متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع
لیکن $\overline{NB} \parallel \overline{AM}$		(i) کی رو سے
$\overline{NB} \parallel \overline{MC}$ ...... (iii)	$\Rightarrow$	M ، $\overline{AC}$ پر واقع ہے
$\overline{MC} \cong \overline{AM}$ ...... (iv)		معلوم
$\overline{NB} \cong \overline{MC}$ ...... (v)		نتائج (ii) اور (iv) سے
لہٰذا BCMN ایک متوازی الاضلاع ہے۔		نتائج (iii) اور (v) سے
اس لیے $\overline{BC} \parallel \overline{LM}$ یا $\overline{BC} \parallel \overline{NL}$		متوازی الاضلاع BCMN کے مخالف اضلاع
$\overline{BC} \cong \overline{NM}$ ...... (vi)		متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع
لیکن $m\overline{LM} = \frac{1}{2} m\overline{NM}$ ...... (vii)		عمل
پس $m\overline{LM} = \frac{1}{2} m\overline{BC}$		نتائج (vi) اور (vii) سے

نوٹ $\overline{ML}$ کو نقطہ N تک بڑھانے کی بجائے ہم $\overline{LM}$ کو نقطہ M سے آگے بڑھا کر اس پر بھی نقطہ N لے سکتے ہیں۔

مثال ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ترتیب وار ملانے والے قطعات خط متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

معلوم چوکور ABCD میں نقاط P، Q، R اور S بالترتیب اضلاع $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ کے وسطی نقاط ہیں۔ نقاط P کو Q سے، Q کو R سے، R کو S سے اور S کو P سے ملایا گیا ہے۔

مطلوب PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔

عمل نقطہ A کو نقطہ C سے ملائیں

ثبوت

بیانات	دلائل
ΔDAC میں	
$\overline{SR} \parallel \overline{AC}$ $m\overline{SR} = \frac{1}{2} m\overline{AC}$	S وسطی نقطہ ہے $\overline{DA}$ کا اور R وسطی نقطہ ہے $\overline{CD}$ کا
ΔBAC میں	
$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ $m\overline{PQ} = \frac{1}{2} m\overline{AC}$	P وسطی نقطہ ہے $\overline{AB}$ کا اور Q وسطی نقطہ ہے $\overline{BC}$ کا
$\therefore$ $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$	ہر ایک $\overline{AC}$ کے متوازی ہے۔
$m\overline{SR} = m\overline{PQ}$	ہر ایک $m\overline{AC}$ کا نصف ہے۔
لہٰذا PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔	$\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$ ، $m\overline{SR} = m\overline{PQ}$ (ثابت شدہ)

مشق 11.3

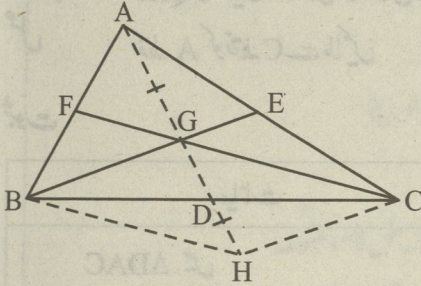
1- ثابت کیجیے کہ کسی چوکور کے مخالف اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات خط باہم تنصیف کرتے ہیں۔

2- ثابت کیجیے کہ مستطیل کے مخالف اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے قطعات خط ایک دوسرے کی قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں۔ (اشارہ: مستطیل کے وتر متماثل ہوتے ہیں)

3- ثابت کیجیے کہ مثلث کے کسی ضلع کے وسطی نقطہ میں سے دوسرے ضلع کے متوازی قطعہ خط تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

مسئلہ 11.1.4

مثلث کے تینوں وسطانیے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر ایک وسطانیہ کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔

معلوم ΔABC

مطلوب ΔABC کے وسطانیے ہم نقطہ ہیں اور یہ مشترک نقطہ ہر ایک وسطانیے کی تثلیث کرتا ہے۔

عمل

ΔABC کے دو وسطانیے $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ کھینچے جو ایک دوسرے کو G پر قطع کرتے ہیں۔

A کو G سے ملا کر نقطہ H تک بڑھایا اس طرح کہ $\overline{AG} \cong \overline{GH}$

H کو نقاط B اور C سے ملایا۔ $\overline{AH}$ اور $\overline{BC}$ کا نقطہ تقاطع D ہے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
ΔACH میں	
$\overline{GE} \parallel \overline{HC}$	G اور E بالترتیب $\overline{AH}$ اور $\overline{AC}$ کے وسطی نقاط ہیں۔
…… (i) $\overline{BE} \parallel \overline{HC}$ یا	G، $\overline{BE}$ پر واقع ہے۔
اسی طرح	
…… (ii) $\overline{CF} \parallel \overline{HB}$	نتیجہ (i) سے
لہٰذا BHCG ایک متوازی الاضلاع ہے۔	نتائج (i) اور (ii) سے
اور (iii) …… $m\overline{GD} = \frac{1}{2} m\overline{GH}$	متوازی الاضلاع BHCG کے وتر $\overline{BC}$ اور $\overline{GH}$ ایک دوسرے کو نقطہ D پر قطع کرتے ہیں۔

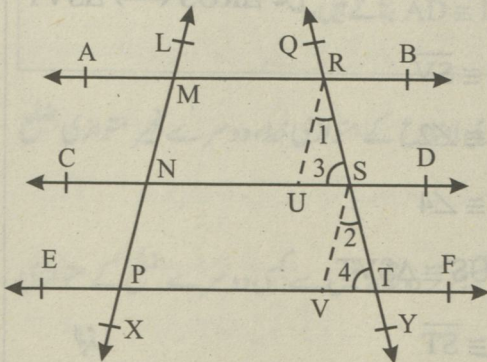
(یا D ضلع $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ ہے) $\therefore \overline{BD} \cong \overline{CD}$ یعنی $\overline{AD}$ مثلث ABC کا وسطانیہ ہے۔ وسطانیے $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ نقطہ G میں سے گزرتے ہیں۔	$\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ کا نقطہ تقاطع G ہے اور $\overline{AD}$ بھی اس میں سے گزرتا ہے۔
اب $\overline{GH} \cong \overline{AG}$ ...... (iv)	عمل
$\therefore m\overline{GD} = \frac{1}{2} m\overline{AG}$	نتائج (iii) اور (iv) سے
اور (v) $\overline{AD}$ کا نقطہ تثلیث G ہے۔ اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ $\overline{BE}$ اور $\overline{CF}$ کا نقطہ تثلیث بھی G ہے۔	

مشق 11.4

-1 ایک مثلث کے وسطانیے جس نقطہ پر ہم نقطہ ہیں اس کا مثلث کے راسوں سے فاصلہ بالترتیب 1.2cm ، 1.4cm اور 1.6 cm ہے۔ وسطانیوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

-2 ثابت کیجیے کہ ایک مثلث کے وسطانیے اور اس کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے بننے والی مثلث کے وسطانیے ایک ہی نقطہ پر ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

مسئلہ 11.1.5

اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط ایک خط قاطع پر متماثل قطعات بنائیں تو وہ کسی دوسرے خط قاطع پر بھی متماثل قطعات بنائیں گے۔

معلوم $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

$\overleftrightarrow{LX}$ ان کو بالترتیب M، N اور P پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\overline{MN} \cong \overline{NP}$

$\overleftrightarrow{QY}$ ان کو بالترتیب S،R اور T پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب $\overline{RS} \cong \overline{ST}$

عمل R میں سے $\overline{RU} \parallel \overline{LX}$ کھینچا جو $\overline{CD}$ کو نقطہ U پر ملا۔

S میں سے $\overline{SV} \parallel \overline{LX}$ کھینچا جو $\overline{EF}$ کو نقطہ V پر ملا۔

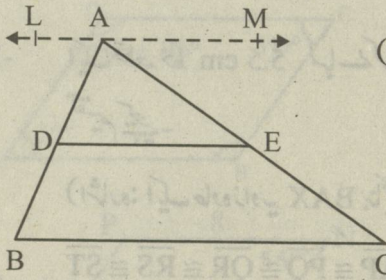
شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$ ، $\angle 2$ ، $\angle 3$ اور $\angle 4$ رکھے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
MNUR ایک متوازی الاضلاع ہے۔	$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (معلوم) $\overline{RU} \parallel \overline{LX}$ (عمل)
$\therefore$ $\overline{MN} \cong \overline{RU}$ …… (i)	متوازی الاضلاع MNUR کے مخالف اضلاع
اسی طرح $\overline{NP} \cong \overline{SV}$ …… (ii)	نتیجہ (i) سے
لیکن $\overline{MN} \cong \overline{NP}$ …… (iii)	معلوم
$\therefore$ $\overline{RU} \cong \overline{SV}$	نتائج (i) ، (ii) اور (iii) سے
$\because$ $\overline{RU} \parallel \overline{SV}$	ہر ایک $\overleftrightarrow{LX}$ کے متوازی ہے (عمل)
پس $\angle 1 \cong \angle 2$	متناظرہ زاویے
$\angle 3 \cong \angle 4$	متناظرہ زاویے
$\Delta RUS \longleftrightarrow \Delta SVT$ میں	
$\overline{RU} \cong \overline{SV}$	ثابت شدہ
$\angle 1 \cong \angle 2$	ثابت شدہ
$\angle 3 \cong \angle 4$	ثابت شدہ
$\therefore$ $\Delta RUS \cong \Delta SVT$	ض۔ز۔ز = ض۔ز۔ز
لہٰذا $\overline{RS} \cong \overline{ST}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

> **نوٹ**
>
> یہ مسئلہ ایک قطع خط کو متماثل (برابر) حصوں میں تقسیم کرنے میں مدد دیتا ہے۔ علاوہ ازیں کسی قطعہ خط کو دیے گئے متناسب لمبائیوں والے حصوں میں تقسیم کرنے کے لیے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔

نتائج صریح

(i) اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ میں سے کسی دوسرے ضلع کے متوازی خط کھینچا جائے تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔

معلوم ΔABC میں $\overline{AB}$ کا وسطی نقطہ D ہے (یعنی $AD=DB$)

اور $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ہے جو AC کو نقطہ E قطع کرتا ہے۔

مطلوب $\overline{AE} \cong \overline{EC}$

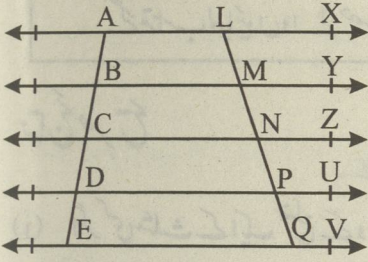
عمل نقطہ A میں سے گزرتا ہوا $\overleftrightarrow{LM}$ متوازی $\overline{BC}$ کھینچیں۔

ثبوت

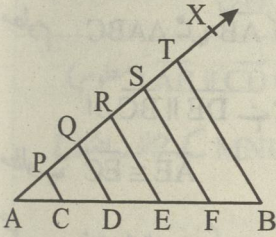
بیانات	دلائل
$\overleftrightarrow{LM}$, $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ خط قاطع $\overline{AC}$ پر متماثل قطعات بناتے ہیں۔ یعنی $\overline{AE} \cong \overline{EC}$	$\overleftrightarrow{LM}$, $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ تینوں ایک دوسرے کے متوازی ہیں (معلوم، عمل) اور قاطع $\overline{AB}$ پر متماثل قطعات $\overline{AD} \cong \overline{DB}$ بناتے ہیں۔

(ii) ذوزنقہ کے ایک غیر متوازی ضلع کے وسطی نقطہ میں سے متوازی اضلاع کے متوازی خط، دوسرے غیر متوازی ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

(iii) اگر کسی مثلث کے ضلع کو چند متماثل حصوں میں تقسیم کر کے تقسیم کردہ نقاط میں سے کسی دوسرے ضلع کے متوازی خطوط کھینچے جائیں تو وہ تیسرے ضلع پر متماثل قطعات بنائیں گے۔

مشق 11.5

-1 سامنے دی گئی شکل میں $\overleftrightarrow{AX} \parallel \overleftrightarrow{BY} \parallel \overleftrightarrow{CZ} \parallel \overleftrightarrow{DU} \parallel \overleftrightarrow{EV}$

اور $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE}$

اگر $m\overline{MN} = 1\text{ cm}$ ہو تو $\overline{LN}$ اور $\overline{LQ}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

-2 ایک قطعہ خط 5.5 cm لمبا لے کر اس کو 5 متماثل حصوں میں تقسیم کیجیے۔

(اشارہ: ایک حادہ زاویہ BAX بنائیں۔ $\overline{AX}$ پر

$\overline{AP} \cong \overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RS} \cong \overline{ST}$ لے کر T کو B سے ملائیں۔

نقاط P, Q, R, S میں سے $\overline{TB}$ کے متوازی خطوط کھینچیں)

اعادہ مشق 11

-1 خالی جگہ پر کریں۔

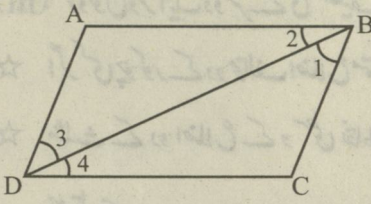
(i) متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع .... ہوتے ہیں۔

(ii) متوازی الاضلاع کے مخالف زاویے .... ہوتے ہیں۔

(iii) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر .... کرتے ہیں۔

(iv) مثلث کے وسطانیے .... ہوتے ہیں۔

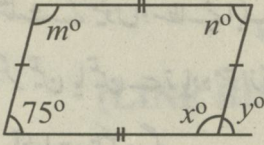
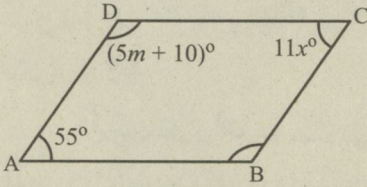
(v) متوازی الاضلاع کا کوئی ایک وتر اسے دو .... مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

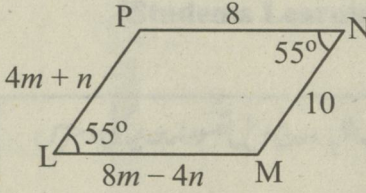
-2 سامنے دی گئی متوازی الاضلاع ABCD میں

(i) $m\overline{AB}$ .... $m\overline{DC}$

(ii) $m\overline{BC}$ .... $m\overline{AD}$

(iii) $m\angle 1 \cong$ ....

(iv) $m\angle 2 \cong$ ....

-3 سامنے دی گئی شکل میں نامعلوم x°، y°، m° اور n° کی مقدار معلوم کریں۔

-4 سامنے دی گئی شکل میں اگر ABCD ایک متوازی الاضلاع ہو تو x اور m کی مقدار معلوم کریں۔

-5 سامنے دی گئی شکل میں LMNP ایک متوازی الاضلاع ہے۔

m اور n کی قیمت معلوم کریں۔

-6 مندرجہ بالا سوال نمبر 5 میں متوازی الاضلاع کے دو مخالف زاویوں کا مجموعہ 110° ہے۔ زاویوں میں سے ہر ایک کی مقدار معلوم کریں۔

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم مندرجہ ذیل مسئلے زیر بحث لائے اور انہیں کچھ سوالات حل کرنے میں استعمال کیا۔ ان کے علاوہ کچھ اضافی سوالات بھی طلبا کی عملی مہارت بڑھانے کے لیے شامل کیے گئے ہیں۔

☆ ایک متوازی الاضلاع میں

(i) مخالف اضلاع متماثل ہوتے ہیں

(ii) مخالف زاویے متماثل ہوتے ہیں

(iii) دونوں وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

☆ اگر کسی چوکور کے دو مخالف اضلاع متماثل اور متوازی ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

☆ مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی اور لمبائی میں اس سے نصف ہوتا ہے۔

☆ مثلث کے تینوں وسطانیے ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ہر ایک وسطانیے کا نقطہ تثلیث ہوتا ہے۔

☆ اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خطوط ایک خط قاطع پر متماثل قطعات بنائیں تو وہ کسی دوسرے خط قاطع پر بھی متماثل قطعات بنائیں گے۔

یونٹ 12

خط اور زاویہ کے ناصف

(LINE BISECTORS AND ANGLE BISECTORS)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

12.1(i) قطعہ خط کا ناصف (Bisector of a Line Segment)

(ii) زاویہ کا ناصف (Bisector of an Angle)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی زاویے کے اندرونے میں ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

تعارف

اس یونٹ میں ہم کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف اور کسی زاویہ کے ناصف کے بارے میں مسئلے اور ان کے عکس ثابت کریں گے۔ لیکن بہتر ہوگا کہ ایسا کرنے سے پیشتر مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کو دہرا لیں۔

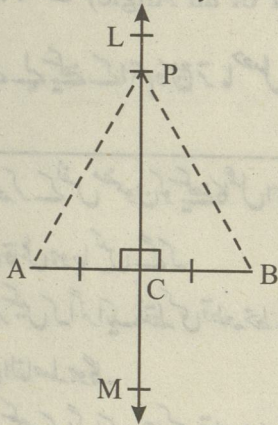
قطعہ خط کا عمودی ناصف

ایک خط l کسی قطعہ خط کا عمودی ناصف کہلاتا ہے اگر l قطعہ خط پر عمود بھی ہو اور قطعہ خط کے وسطی نقطہ میں سے بھی گزرے۔

زاویہ کا ناصف

اگر $\angle ABC$ کے اندر کوئی نقطہ P اس طرح واقع ہو کہ $m\angle ABP = m\angle PBC$ تو $\overrightarrow{BP}$ کو $\angle ABC$ کا ناصف کہتے ہیں۔ (یعنی $\overrightarrow{BP}$ زاویہ ABC کی تنصیف کرتی ہے)

مسئلہ 12.1.1

اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

معلوم ایک خط LM قطعہ خط AB کو نقطہ C پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ

$\overleftrightarrow{LM} \perp \overline{AB}$ اور $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

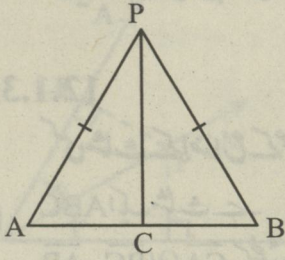
مطلوب $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

عمل $\overleftrightarrow{LM}$ پر ایک نقطہ P لیں۔ P کو نقاط A اور B سے ملائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ACP \longleftrightarrow \Delta BCP$ میں	
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	معلوم
$\angle ACP \cong \angle BCP$	$\overline{PC} \perp \overline{AB}$ (معلوم) یعنی C پر ہر ایک زاویہ $= 90°$
$\overline{PC} \cong \overline{PC}$	مشترک
$\therefore$ $\Delta ACP \cong \Delta BCP$	ض۔ز۔ض کا موضوعہ
پس $\overline{PA} \cong \overline{PB}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

مسئلہ 12.1.2 (مسئلہ 12.1.1 کا عکس)

اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔

معلوم $\overline{AB}$ ایک قطعہ خط ہے۔ ایک نقطہ P ایسا ہے کہ $\overline{PA} \cong \overline{PB}$

مطلوب نقطہ P، $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔

عمل نقطہ P کو AB کے وسطی نقطہ C سے ملائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta ACP \longleftrightarrow \Delta BCP$ میں	
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$	معلوم
$\overline{PC} \cong \overline{PC}$	مشترک
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	عمل
$\therefore \quad \Delta ACP \cong \Delta BCP$	ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
$\therefore \quad \angle ACP \cong \angle BCP$ ...... (i)	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
لیکن $m\angle ACP + m\angle BCP = 180°$ ..... (ii)	سپلیمنٹری زاویے
اس لیے $m\angle ACP = m\angle BCP = 90°$	نتائج (i) اور (ii) کی رو سے
$\therefore \quad \overline{PC} \perp \overline{AB}$ ...... (iii)	$m\angle ACP = 90°$ (ثابت شدہ)
$\overline{CA} \cong \overline{CB}$ ...... (iv)	عمل
پس $\overline{PC}$ عمودی ناصف ہے $\overline{AB}$ کا	نتائج (iii) اور (iv) کی رو سے
یعنی نقطہ P، $\overline{AB}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔	

مشق 12.1

1۔ ثابت کیجیے کہ کسی دائرہ کا مرکز اس کے ہر ایک قطر کے عمودی ناصف پر ہوتا ہے۔

2۔ تین غیر ہم خط نقاط میں سے گزرنے والے دائرہ کا مرکز کہاں ہوگا اور کیوں؟

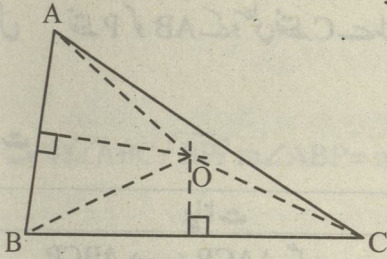
3- تین دیہات P، Q اور R ایک سیدھ میں نہیں ہیں۔ ان کے باشندوں نے ایک ایسے مقام پر چلڈرن پارک بنانے کا پروگرام بنایا جس کا فاصلہ ان تینوں دیہاتوں سے یکساں ہو۔ چلڈرن پارک کے مقام کو متعین کر کے ثابت کریں کہ یہ مقام تینوں دیہاتوں سے مساوی الفاصلہ ہے۔

مسئلہ 12.1.3

کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

معلوم ABC ایک مثلث ہے۔

مطلوب $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہیں۔

عمل $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے عمودی ناصف کھینچیں جو ایک دوسرے کو نقطہ O پر ملتے ہیں۔ نقطہ O کو A، B اور C سے ملائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ...... (i)	ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔
$\therefore\ \overline{OB} \cong \overline{OC}$ ...... (ii)	نتیجہ (i) کی رو سے
$\therefore\ \overline{OA} \cong \overline{OC}$ ...... (iii)	نتائج (i) اور (ii) کی رو سے
(iv)... نقطہ O ، $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف پر واقع ہے۔	نتیجہ (iii) سے نقطہ O نقاط A اور C سے مساوی الفاصلہ ہے۔
(v) لیکن نقطہ O، $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$ کے عمودی ناصفوں پر واقع ہے	عمل
لہذا ΔABC کے تینوں اضلاع $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف نقطہ O میں سے گزرتے ہیں۔	نتائج (iv) اور (v) کی رو سے

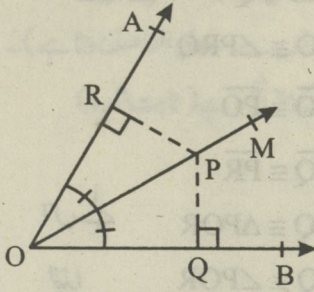
مشاہدہ کریں کہ

(a) حادہ زاویہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو مثلث کے اندر قطع کرتے ہیں۔

(b) قائمہ زاویہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو وتر پر قطع کرتے ہیں۔

(c) منفرجہ زاویہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو مثلث کے باہر قطع کرتے ہیں۔

مسئلہ 12.1.4

کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

معلوم $\angle AOB$ کی ناصف $\overrightarrow{OM}$ پر کوئی نقطہ P واقع ہے۔

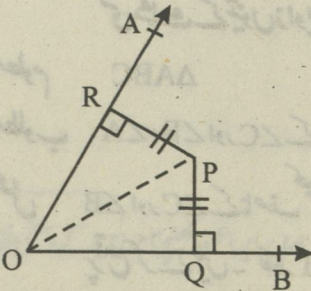
مطلوب $m\overline{PQ} = m\overline{PR}$ یعنی نقطہ P، $\overrightarrow{OA}$ اور $\overrightarrow{OB}$ سے ہم فاصلہ ہے۔

عمل P سے $\overline{PR} \perp \overrightarrow{OA}$ اور $\overline{PQ} \perp \overrightarrow{OB}$ کھینچیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\Delta POQ \longleftrightarrow \Delta POR$ میں	
$\overline{OP} \cong \overline{OP}$	مشترک
$\angle PQO \cong \angle PRO$	عمل
$\angle POQ \cong \angle POR$	معلوم
$\therefore \quad \Delta POQ \cong \Delta POR$	ض۔ز۔ز $\cong$ ض۔ز۔ز
پس $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع

مسئلہ 12.1.5 (عکس مسئلہ 12.1.4)

اگر کسی زاویے کے اندرونے میں کوئی ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

معلوم $\angle AOB$ کے اندرونے میں ایک نقطہ P اس طرح لیں کہ $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$ جبکہ $\overline{PQ} \perp \overrightarrow{OB}$ اور $\overline{PR} \perp \overrightarrow{OA}$ ہے۔

مطلوب نقطہ P، $\angle AOB$ کے ناصف پر واقع ہے۔

عمل نقطہ P کو نقطہ O سے ملائیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
	$\Delta POQ \longleftrightarrow \Delta POR$ میں
معلوم (قائمہ زاویے)	$\angle PQO \cong \angle PRO$
مشترک	$\overline{PO} \cong \overline{PO}$
معلوم	$\overline{PQ} \cong \overline{PR}$
وتر۔ضلع ≅ وتر۔ضلع	اس لیے $\therefore$ $\Delta POQ \cong \Delta POR$
متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے	لہٰذا $\angle POQ \cong \angle POR$
	پس نقطہ P، $\angle AOB$ کے ناصف پر واقع ہے۔

مشق 12.2

1۔ ایک چوکور ABCD میں $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ اور $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ کے عمودی ناصف ایک دوسرے کو نقطہ N پر ملتے ہیں۔ ثابت کریں کہ $\overline{BN}$ ناصف ہے $\angle ABC$ کا۔

2۔ چوکور ABCP کے $\angle A$, $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف نقطہ O پر ملتے ہیں۔ ثابت کریں کہ $\angle P$ کا ناصف بھی نقطہ O میں سے گزرے گا۔

3۔ ثابت کریں کہ مساوی الساقین مثلث کے متماثل اضلاع کے عمودی ناصف اس کے ارتفاع کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔

4۔ ثابت کریں کہ مثلث کے تینوں ارتفاع ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

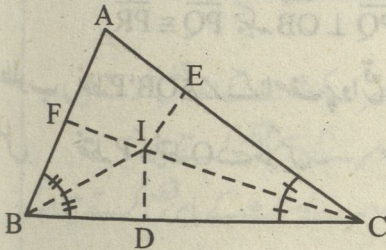
مسئلہ 12.1.6

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

معلوم ΔABC

مطلوب $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف ہم نقطہ ہوں گے۔

عمل $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف کھینچیں جو ایک دوسرے کو نقطہ I پر قطع کرتے ہیں۔ نقطہ I سے $\overline{IF} \perp \overline{AB}$، $\overline{ID} \perp \overline{BC}$ اور $\overline{IE} \perp \overline{CA}$ کھینچیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
$\overline{ID} \cong \overline{IF}$	عمل (کسی زاویے کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے)۔
اسی طرح $\overline{ID} \cong \overline{IE}$	
$\therefore$ $\overline{IE} \cong \overline{IF}$	ہر ایک $\overline{ID}$ کے متماثل ہے (ثابت شدہ)
لہٰذا نقطہ I واقع ہے $\angle A$ کے ناصف پر ...... (i)	
لیکن نقطہ I ، $\angle ABC$ اور $\angle BCA$ کے ناصفوں پر بھی واقع ہے۔ ...... (ii)	عمل
پس $\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ کے ناصف I پر ہم نقطہ ہیں۔	نتائج (i) اور (ii) کی رو سے

نوٹ عملی جیومیٹری میں بھی کسی دی گئی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف کھینچ کر ہم تصدیق کریں گے کہ یہ ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

مشق 12.3

-1 ثابت کریں کہ مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر زاویوں کے ناصف اس مثلث کے ارتفاع پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

-2 ثابت کریں کہ مثلث کے دو بیرونہ اور تیسرے اندرونہ زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

اعادہ مشق 12

-1 مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) لفظ تنصیف سے مراد دو برابر حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ ....

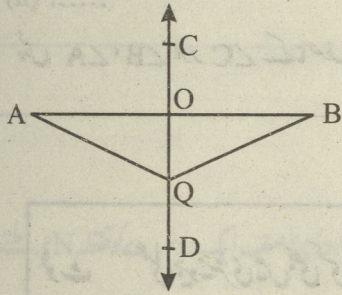
(ii) کسی قطعہ خط کی عمودی تنصیف سے مراد یہ ہے کہ اس قطعہ خط پر ایسا عمود کھینچنا جو اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرے۔ ....

(iii) کوئی نقطہ جو ایک قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو وہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ نہیں ہوتا۔ ....

(iv) کوئی نقطہ ایک قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ ....

(v) کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ نہیں ہوتے۔ ....

(vi) کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔ ....

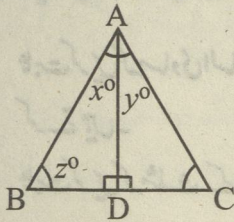
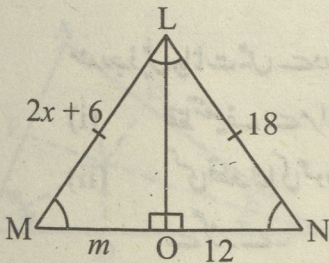
(vii) ایک زاویہ کے اندرونے میں کوئی نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔ ....

2۔ اگر $\overleftrightarrow{CD}$ قطعہ خط AB کا عمودی ناصف ہو تو

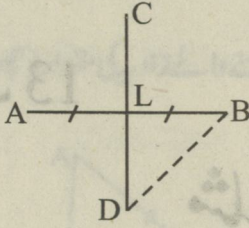
(i) $m\overline{OA} = \cdots\cdots$

(ii) $m\overline{AQ} = \cdots\cdots$

3۔ مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کریں۔

(i) قطعہ خط کا ناصف

(ii) زاویہ کا ناصف

4۔ دی گئی مساوی الاضلاع مثلث ABC میں $\overline{AD}$ زاویہ A کا ناصف ہے۔ نامعلوم x^o، y^o اور z^o کی قیمت معلوم کریں۔

5۔ دی گئی متماثل مثلثان LMO اور LNO میں نامعلوم x اور m کی مقدار معلوم کریں۔

6۔ سامنے کی شکل میں $\overline{CD}$ قطعہ خط AB کا عمودی ناصف ہے۔

(i) اگر $m\overline{AB} = 6\,cm$ ہو تو $m\overline{AL}$ اور $m\overline{LB}$ معلوم کریں۔

(ii) اگر $m\overline{BD} = 4\,cm$ ہو تو $m\overline{AD}$ معلوم کریں۔

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے درج ذیل مسئلے بیان اور ثابت کرنا سیکھے۔

☆ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا۔

☆ اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ اس قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہوگا۔

☆ کسی مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

☆ کسی زاویہ کے ناصف پر ہر ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہوتا ہے۔

☆ اگر کسی زاویے کے اندرونے میں ایک نقطہ اس کے بازوؤں سے مساوی الفاصلہ ہو تو وہ نقطہ اس زاویے کے ناصف پر واقع ہوتا ہے۔

☆ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

- کسی قطعہ خط کی عمودی تنصیف سے مراد یہ ہے کہ اس قطعہ خط پر ایسا عمود کھینچنا جو اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرے۔
- کسی زاویہ کی تنصیف سے مراد یہ ہے کہ ایک ایسی شعاع کھینچیں جو دیے گئے زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرے۔

یونٹ 13

مثلث کے اضلاع اور زاویے

(SIDES AND ANGLES OF A TRIANGLE)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

13.1(i) مثلث کے اضلاع (Sides of a Triangle)

(ii) مثلث کے زاویے (Angles of a Triangle)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ما حصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔

☆ ثابت کر سکیں کہ کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

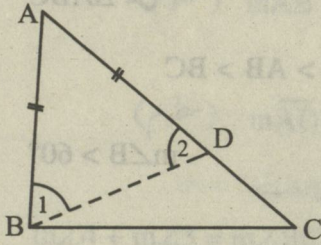
☆ ثابت کر سکیں کہ کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔

تعارف

آپ کو یاد ہو گا کہ اگر کسی مثلث کے دو ضلعے متماثل ہوں تو ان کے بالمقابل زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر کسی مثلث کے دو زاویے متماثل ہوں تو ان کے بالمقابل ضلعے بھی متماثل ہوتے ہیں۔ لیکن اس یونٹ میں کسی مثلث کے اضلاع اور زاویوں کے درمیان نابرابری سے متعلق کچھ دلچسپ مسئلے بیان اور ثابت کر کے اضافی معلومات کا مطالعہ کریں گے۔

مسئلہ 13.1.1

اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویے کی مقدار سے) زیادہ ہوگی۔

معلوم ΔABC میں

$m\overline{AC} > m\overline{AB}$

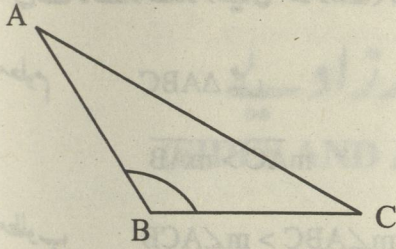
مطلوب $m\angle ABC > m\angle ACB$

عمل $\overline{AC}$ پر نقطہ D پر اس طرح لیا کہ $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ اور نقطہ B کو D سے ملایا۔

اس طرح ΔADB مساوی الساقین مثلث حاصل ہوئی۔ شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$ اور $\angle 2$ رکھے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
ΔABD میں	
$m\angle 1 = m\angle 2$ ...... (i)	متماثل اضلاع کے سامنے والے زاویے (عمل)
ΔBCD میں	
$m\angle 2 > m\angle ACB$ ...... (ii)	مثلث کا بیرونی زاویہ سامنے والے غیر متصلہ اندرونی زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔
$\therefore$ $m\angle 1 > m\angle ACB$ ...... (iii)	(i) اور (ii) کی رو سے
لیکن $m\angle ABC = m\angle 1 + m\angle DBC$	زاویوں کی جمع کا موضوعہ
$\therefore$ $m\angle ABC > m\angle 1$ ...... (iv)	
$\therefore$ $m\angle ABC > m\angle 1 > m\angle ACB$	(iii) اور (iv) کی رو سے
لہٰذا $m\angle ABC > m\angle ACB$	اعداد کی نابرابری کی خاصیت متعدیت

مثال 1 ثابت کریں کہ کسی مختلف الاضلاع مثلث میں سب سے بڑی لمبائی والے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار 60° سے زیادہ ہوگی۔ (یعنی قائمہ زاویہ کے دو تہائی سے زیادہ ہوگی)

معلوم ΔABC میں

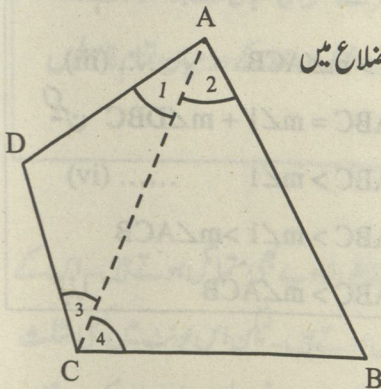
$AC > AB > BC$

مطلوب $m\angle B > 60^\circ$

ثبوت

بیانات	دلائل
ΔABC میں	
$m\angle B > m\angle C$	$m\overline{AC} > m\overline{AB}$ (معلوم)
$m\angle B > m\angle A$	$m\overline{AC} > m\overline{BC}$ (معلوم)
لیکن $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$	$\angle A$، $\angle B$ اور $\angle C$ مثلث ABC کے اندرونی زاویے ہیں
$\therefore$ $m\angle B + m\angle B + m\angle B > 180^\circ$	$m\angle B > m\angle A$ اور $m\angle B > m\angle C$ (ثابت شدہ)
لہٰذا $m\angle B > 60^\circ$	$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

مثال 2 ایک چوکور ABCD میں $\overline{AB}$ لمبائی میں سب سے بڑا اور $\overline{CD}$ سب سے چھوٹا ضلع ہے۔

ثابت کریں کہ $m\angle BCD > m\angle BAD$

معلوم چوکور ABCD میں ضلع $\overline{AB}$ لمبائی کے لحاظ سے دیگر اضلاع میں سب سے بڑا اور ضلع $\overline{CD}$ سب سے چھوٹا ہے۔

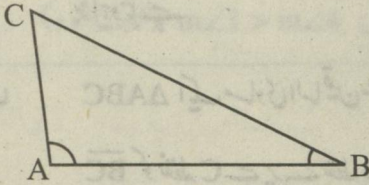
مطلوب $m\angle BCD > m\angle BAD$

عمل نقطہ A کو نقطہ C سے ملائیں اور شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$، $\angle 2$، $\angle 3$ اور $\angle 4$ رکھیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
	ΔABC میں
$m\overline{AB} > m\overline{BC}$ (معلوم)	$m\angle 4 > m\angle 2$ I
	ΔACD میں
$m\overline{AD} > m\overline{CD}$ (معلوم)	$m\angle 3 > m\angle 1$ II
I اور II کی رو سے	$\therefore\ m\angle 4 + m\angle 3 > m\angle 2 + m\angle 1$
$\left.\begin{array}{l} m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle BCD \\ m\angle 2 + m\angle 1 = m\angle BAD \end{array}\right\}$	لہٰذا $m\angle BCD > m\angle BAD$

مسئلہ 13.1.2 (عکس مسئلہ 13.1.1)

اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں، تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہوگا۔

معلوم مثلث ABC میں $m\angle A > m\angle B$

مطلوب $m\overline{BC} > m\overline{AC}$

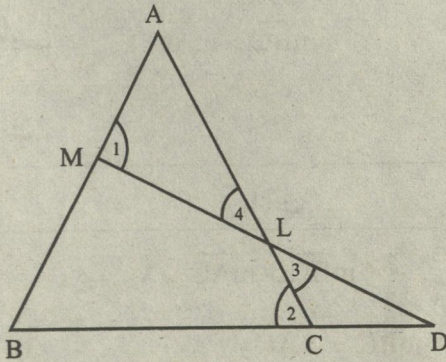
ثبوت

دلائل	بیانات
	اگر $m\overline{BC} \not> m\overline{AC}$ ہو تو
حقیقی اعداد کی ثلاثی خاصیت	(i) $m\overline{BC} = m\overline{AC}$
	یا (ii) $m\overline{BC} < m\overline{AC}$
	(i) کی صورت میں اگر $m\overline{BC} = m\overline{AC}$ ہو تو
متماثل اضلاع کے سامنے والے زاویے متماثل ہوتے ہیں	$m\angle A = m\angle B$
معلوم کے خلاف	جو کہ ممکن نہیں۔

بیانات	وجوہات
(ii) کی صورت میں اگر $m\overline{BC} < m\overline{AC}$ ہو تو $m\angle A < m\angle B$	بڑے ضلع کے سامنے والا زاویہ مقدار میں چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار سے بڑا ہوتا ہے
یہ صورت بھی ممکن نہیں ہے۔	معلوم کے خلاف
$\therefore\ m\overline{BC} \neq m\overline{AC}$	
اور $m\overline{BC} \not< m\overline{AC}$	
پس $m\overline{BC} > m\overline{AC}$	حقیقی اعداد کی خاصیت ثلاثی

نتائج صریح

(i) کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی باقی ہر دو اضلاع کی لمبائیوں سے بڑی ہوتی ہے۔

(ii) کسی منفرجۃ الزاویہ مثلث میں منفرجہ زاویے کے سامنے والا ضلع لمبائی میں ہر دیگر دو اضلاع سے لمبائی میں بڑا ہوتا ہے۔

مثال ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے۔ اس کے قاعدہ $\overline{BC}$ کو نقطہ C سے پرے نقطہ D تک بڑھایا گیا ہے۔ D میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خط اضلاع $\overline{AC}$ اور $\overline{AB}$ کو بالترتیب نقاط L اور M پر قطع کرتا ہے۔

ثابت کریں کہ $m\overline{AL} > m\overline{AM}$

معلوم ΔABC میں $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

$\overline{BC}$ پر C سے پرے ایک نقطہ D ہے۔ D میں سے گزرتا ہوا ایک قطعہ خط $\overline{AC}$ کو L پر اور $\overline{AB}$ کو M پر قطع کرتا ہے۔

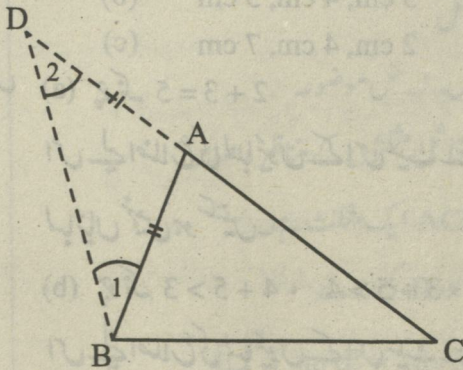
مطلوب $m\overline{AL} > m\overline{AM}$

ثبوت

دلائل	بیانات
	ΔABC میں
(معلوم) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	$\angle B \cong \angle 2$ I
	ΔMBD میں
$\angle 1$ بیرونی اور $\angle B$ غیر متصلہ اندرونی زاویہ ہے۔	$m\angle 1 > m\angle B$ II
I اور II کی رو سے	$\therefore$ $m\angle 1 > m\angle 2$ III
	ΔLCD میں
بیرونی زاویہ غیر متصلہ اندرونی زاویے سے بڑا ہوتا ہے۔	$m\angle 2 > m\angle 3$ IV
نتائج III اور IV کی رو سے	$\therefore$ $m\angle 1 > m\angle 3$ V
راسی زاویے	لیکن $\angle 3 \cong \angle 4$ VI
نتائج V اور VI کی رو سے	$\therefore$ $m\angle 1 > m\angle 4$
ΔALM میں $m\angle 1 > m\angle 4$ (ثابت شدہ)	لہٰذا $m\overline{AL} > m\overline{AM}$

مسئلہ **13.1.3**

کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

معلوم ΔABC

مطلوب

(i) $m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$

(ii) $m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$

(iii) $m\overline{BC} + m\overline{CA} > m\overline{AB}$

عمل $\overrightarrow{CA}$ پر ایک نقطہ D اس طرح لیں کہ $m\overline{AD} \cong m\overline{AB}$

نقطہ B کو نقطہ D سے ملائیں اور شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$ ، $\angle 2$ رکھیں۔

بیانات	دلائل
ΔABD میں	
$m\angle 1 \cong m\angle 2$ ...... (i)	$m\overline{AD} \cong m\overline{AB}$ (عمل)
$m\angle DBC > m\angle 1$ ...... (ii)	$m\angle DBC = m\angle 1 + m\angle ABC$
$\therefore$ $m\angle DBC > m\angle 2$ ...... (iii)	نتائج (i) اور (ii) کی رو سے
ΔDBC میں	
$m\overline{CD} > m\overline{BC}$	(iii) کی رو سے
$\therefore$ $m\overline{AD} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$	$m\overline{CD} = m\overline{AD} + m\overline{AC}$
لٰہذا $m\overline{AB} + m\overline{AC} > m\overline{BC}$	$m\overline{AD} = m\overline{AB}$ (عمل)
اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ	
$m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$	
اور $m\overline{BC} + m\overline{CA} > m\overline{AB}$	

مثال 1 مندرجہ ذیل مثلث کے اضلاع کی لمبائیوں کے سیٹ ہیں۔ ان میں کس سیٹ سے مثلث بنائی جا سکتی ہے؟

(a) 2 cm, 3 cm, 5 cm

(b) 3 cm, 4 cm, 5 cm

(c) 2 cm, 4 cm, 7 cm

حل

(a) چونکہ $2 + 3 = 5$

اس لیے اضلاع کی لمبائیوں کے اس سیٹ سے مثلث نہیں بن سکتی۔ یعنی یہ لمبائیاں کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں نہیں ہو سکتیں۔

(b) چونکہ $3 < 5 + 4$ ، $4 < 5 + 3$ ، $3 + 4 > 5$

اس لیے اضلاع کی لمبائیوں کے اس سیٹ سے مثلث بن سکتی ہے

(c) چونکہ $2 + 4 < 7$

اس لیے اضلاع کی لمبائیوں کے اس سیٹ سے مثلث نہیں بن سکتی۔

مثال 2

ثابت کریں کہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرنے والے وسطانیے کی لمبائی کے دوگنا سے بڑا ہوتا ہے۔

معلوم ΔABC میں وسطانیہ $\overline{AD}$ ضلع $\overline{BC}$ کی نقطہ D پر تنصیف کرتا ہے۔

مطلوب $m\overline{AB} + m\overline{AC} > 2(m\overline{AD})$

عمل $\overline{AD}$ پر ایک نقطہ E اس طرح لیں کہ $\overline{DE} \cong \overline{AD}$

نقطہ C کو نقطہ E سے ملائیں۔

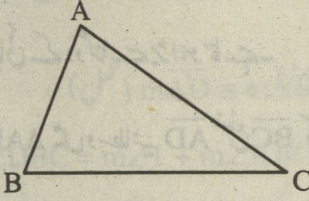
شکل کے مطابق زاویوں کے نام $\angle 1$ ، $\angle 2$ رکھیں۔

A
1
B
D
2
C
E

ثبوت

دلائل	بیانات
	$\Delta ABD \longleftrightarrow \Delta ECD$ میں
معلوم	$\overline{BD} \cong \overline{CD}$
راسی زاویے	$\angle 1 \cong \angle 2$
عمل	$\overline{AD} \cong \overline{ED}$
ض۔ز۔ض موضوعہ	$\therefore$ $\Delta ABD \cong \Delta ECD$
متماثل مثلثوں کے متناظرہ اضلاع	$\therefore$ $\overline{AB} \cong \overline{EC}$ …… I
ACE ایک مثلث ہے	$m\overline{AC} + m\overline{EC} > m\overline{AE}$ …… II
I اور II کی رو سے	$m\overline{AC} + m\overline{AB} > m\overline{AE}$
$m\overline{AE} = 2m\overline{AD}$ (عمل)	لہٰذا $m\overline{AC} + m\overline{AB} > 2m\overline{AD}$
	یا $m\overline{AB} + m\overline{AC} > 2m\overline{AD}$

مثال 3 ثابت کریں کہ مثلث کے کوئی سے دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔

معلوم ΔABC

مطلوب

$m\overline{AC} - m\overline{AB} < m\overline{BC}$ (i)

$m\overline{BC} - m\overline{AB} < m\overline{AC}$ (ii)

$m\overline{BC} - m\overline{AC} < m\overline{AB}$ (iii)

ثبوت

بیانات	دلائل
$m\overline{AB} + m\overline{BC} > m\overline{AC}$	ABC ایک مثلث ہے
$(m\overline{AB} + m\overline{BC} - m\overline{AB}) > (m\overline{AC} - m\overline{AB})$	دونوں اطراف میں سے $m\overline{AB}$ تفریق کرنے سے
$\therefore\ m\overline{BC} > m\overline{AC} - m\overline{AB}$	
$\therefore\ m\overline{AC} - m\overline{AB} < m\overline{BC}$ ...... (i) اسی طرح	$a > b \Rightarrow b < a$
$m\overline{BC} - m\overline{AB} < m\overline{AC}$ $m\overline{BC} - m\overline{AC} < m\overline{AB}$	(i) میں دیے گئے دلائل کی طرح

مشق 13.1

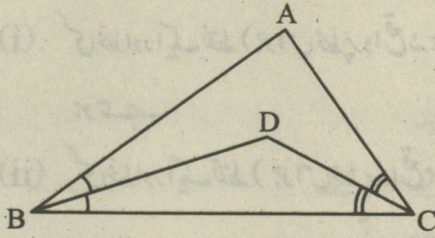
-1 مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 10cm اور 15cm ہیں۔ مندرجہ ذیل میں سے کون سی لمبائی تیسرے ضلع کی ممکن ہوگی؟

(a) 5 cm (b) 20 cm (c) 25 cm (d) 30 cm

-2 نقطہ O مثلث ABC کا ایک اندرونی نقطہ ہے۔ ثابت کریں کہ

$$m\overline{OA} + m\overline{OB} + m\overline{OC} > \frac{1}{2}(m\overline{AB} + m\overline{BC} + m\overline{CA})$$

-3 مثلث ΔABC میں اگر $m\angle B = 70°$ ہو اور $m\angle C = 45°$ تو کون سا ضلع لمبائی میں سب سے بڑا اور کون سا سب سے چھوٹا ہوگا؟

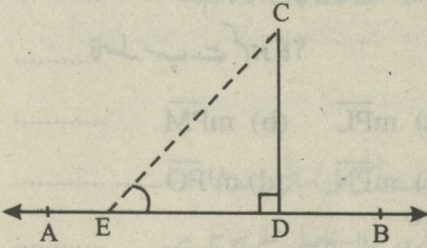
-4 ثابت کریں کہ کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کی لمبائی باقی ہر دو اضلاع کی لمبائیوں سے بڑی ہوتی ہے۔

-5 سامنے دی گئی تکونی شکل میں $AB > AC$

$\overline{BD}$ اور $\overline{CD}$ بالترتیب زاویوں $\angle B$ اور $\angle C$

کے ناصف ہیں۔ ثابت کریں کہ $BD > DC$

مسئلہ 13.1.4

کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے کم ہوگا۔

معلوم ایک خط AB، ایک نقطہ C (جو کہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر واقع نہیں ہے) اور ایک نقطہ D جو کہ $\overleftrightarrow{AB}$ پر اس طرح واقع ہے کہ $\overline{CD}$، خط $\overleftrightarrow{AB}$ پر عمود ہے۔

مطلوب $m\overline{CD}$ نقطہ C سے $\overleftrightarrow{AB}$ تک سب سے کم فاصلہ ہے۔

عمل $\overleftrightarrow{AB}$ پر ایک نقطہ E لیا۔ C اور E کو ملانے سے ایک ΔCDE بن گئی۔

ثبوت

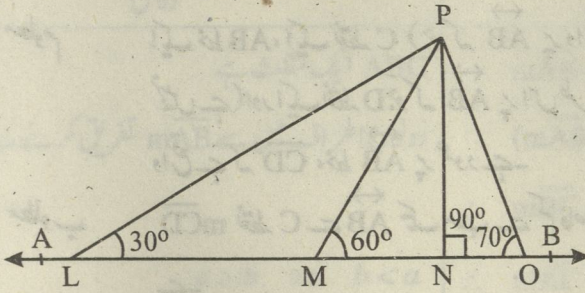
بیانات	دلائل
ΔCDE میں	
$m\angle CDB > m\angle CED$	مثلث کا بیرونی زاویہ ہر غیر متصلہ اندرونی زاویہ سے بڑا ہوتا ہے۔
لیکن $m\angle CDB = m\angle CDE$	قائمہ زاویہ کا سپلیمنٹ
$\therefore$ $m\angle CDE > m\angle CED$	
یا $m\angle CED < m\angle CDE$	نابرابری کی عکسی خاصیت
$\therefore$ $m\overline{CD} < m\overline{CE}$	بڑے زاویہ کے سامنے بڑا ضلع ہوتا ہے۔
لیکن E خط AB کا کوئی نقطہ ہے	
پس $m\overline{CD}$ نقطہ C سے $\overleftrightarrow{AB}$ تک سب سے کم فاصلہ ہے۔	

نوٹ

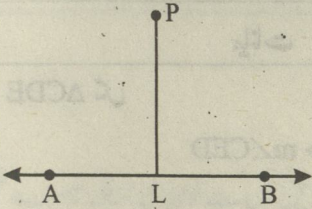
(i) کسی خط اور ایک نقطہ (جو اس خط پر واقع نہ ہو) کے درمیان فاصلہ، نقطہ سے خط تک عمودی قطعہ خط کی لمبائی کے برابر ہوتا ہے۔

(ii) کسی خط اور ایک نقطہ (جو اس خط پر واقع ہو) کے درمیان فاصلہ صفر ہوتا ہے۔

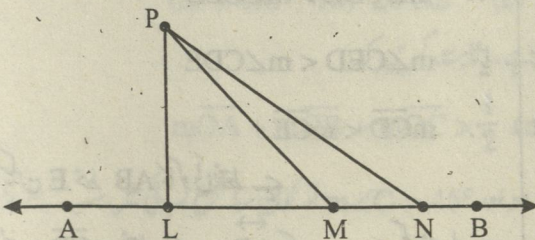
مشق 13.2

-1 شکل میں نقطہ P کا خط AB سے کون سا فاصلہ سب سے کم ہو گا؟

(a) $m\overline{PL}$ (b) $m\overline{PM}$

(c) $m\overline{PN}$ (d) $m\,\overline{PO}$

-2 شکل میں P کوئی ایک نقطہ خط AB سے باہر واقع ہے۔ فاصلہ $m\overline{PL}$ خط AB سے دیگر تمام فاصلوں سے کم ہو گا اگر

(a) $m\angle PLA = 80°$ (b) $m\angle PLB = 100°$

(c) $m\angle PLA = 90°$ (d) $m\angle PLA = 70°$

-3 شکل میں $\overline{PL}$ خط AB پر عمود ہے اور $m\overline{LN} > m\overline{LM}$ ہے۔ ثابت کریں کہ $m\overline{PN} > m\overline{PM}$ ہو گا۔

اعادہ مشق 13

1- مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) کسی مثلث میں زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والا زاویہ بڑا ہوتا ہے۔ ....

(ii) قائمۃ الزاویہ مثلث میں بڑے زاویے کی مقدار 60° ہوتی ہے۔ ....

(iii) قائمۃ الزاویہ مساوی الساقین مثلث میں قائمہ زاویہ کے علاوہ ہر ایک دیگر زاویہ 45° ہوتا ہے۔ ....

(iv) دو متماثل اضلاع والی مثلث کو مساوی الاضلاع مثلث کہتے ہیں۔ ....

(v) ایک نقطہ سے کسی خط تک فاصلوں میں عمودی فاصلہ سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔ ....

(vi) کسی خط پر عمود 90° کا زاویہ بناتا ہے۔ ....

(vii) خط کا کوئی بیرونی نقطہ اس خط کا ہم خط نقطہ ہوتا ہے۔ ....

(viii) کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔ ....

(ix) ایک خط اور ایک ایسا نقطہ جو اس خط پر واقع ہو، کے درمیان فاصلہ صفر ہوتا ہے۔ ....

(x) 2cm ، 3cm اور 5cm لمبائی والے قطعات خط سے مثلث بن سکتی ہے۔ ....

2- کسی خط کے بیرونی نقطہ سے کھینچے گئے قطعات خط میں سے فاصلے میں سب سے چھوٹا قطعہ خط، اس خط کے ساتھ کتنی مقدار کا زاویہ بنائے گا؟

3- اگر ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 13cm ، 12cm اور 5cm ہوں تو تصدیق کریں کہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے کم ہوتا ہے۔

4- اگر ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 10cm، 6cm اور 8cm ہوں تو تصدیق کریں کہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

5- 3cm ، 4cm اور 7cm کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں نہیں ہیں۔ دلیل سے وضاحت کریں۔

6- اگر کسی قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 3cm اور 4cm ہوں تو مثلث کے تیسرے ضلع کی لمبائی کیا ہوگی؟ (اشارہ: وتر معلوم کریں)

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے مندرجہ ذیل مسئلے بیان اور ثابت کیے۔

☆ اگر کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر نہ ہوں تو زیادہ لمبے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار (چھوٹے ضلع کے سامنے والے زاویہ کی مقدار سے) زیادہ ہو گی۔

☆ اگر کسی مثلث کے دو زاویے مقدار میں برابر نہ ہوں تو مقدار میں بڑے زاویے کے سامنے والا ضلع چھوٹے زاویے کے سامنے والے ضلع سے زیادہ لمبا ہو گا۔

☆ کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا مجموعہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

☆ کسی بھی خط کے بیرونی نقطہ سے خط تک کا عمودی فاصلہ، نقطہ اور خط کے درمیان تمام فاصلوں سے چھوٹا ہو گا۔

یونٹ 14

نسبت اور تناسب
(RATIO AND PROPORTION)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

14.1 نسبت اور تناسب (Ratio and Proportion)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل / نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ اگر کوئی خط مستقیم مثلث کے کسی ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو وہ باقی دونوں ضلعوں کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔

☆ اگر ایک قطعہ خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے تو وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

☆ مثلث کے کسی اندرونی زاویے کا ناصف مقابل کے ضلع کو اسی نسبت میں قطع کرتا ہے جو مثلث کے ان دونوں اضلاع کی مقداروں میں ہوتی ہے جو اس زاویہ کی دونوں شعاعوں پر واقع ہوتے ہیں۔

☆ دو متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

تعارف

اس یونٹ میں، ہم کچھ ایسے مسئلے اور صریح نتائج ثابت کریں گے جن کا تعلق کسی مثلث کے اضلاع کے نسبت اور تناسب اور متشابہ مثلثان سے ہوگا۔ اکثر پیشوں میں نسبت تناسب کا علم ایک اہم ضرورت ہے۔ مثلاً غذائی ضروریات کی تقسیم کا اندازہ اور خدمات کا ہنر، صحت بخش دوا کی آمیزش کا عمل، کسی قطعہ زمین کی جغرافیائی حدود کا تعین کرنے کے لیے نقشے تیار کرنا، تعمیراتی کاموں کے علاوہ لاگت پر منافع کا اندازہ لگانا وغیرہ۔

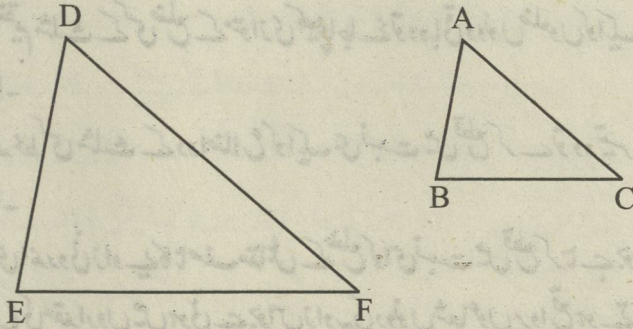
آپ کے ذہن میں ہوگا کہ ہم نے دو ہم اکائی مقداروں a اور b کے درمیان نسبت کی تعریف $a : b = \frac{a}{b}$ کے طور پر کی تھی۔ یعنی ایسا عددی تعلق جو بتاتا ہے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کون سا حصّہ یا کتنے گُنا ہے۔ مقداریں a اور b نسبت $a : b$ کا پہلا اور دوسرا رکن (elements) کہلاتی ہیں۔ دو نسبتوں کے درمیان برابری کے تعلق کو تناسب کہتے ہیں۔

یعنی اگر $a : b = c : d$ تو مقداریں a، b، c اور d تناسب میں ہوں گی۔

متشابہ مثلثان

متشابہ اشکال بھی اتنی ہی اہمیت رکھتی ہیں۔ بالخصوص متشابہ مثلثوں کے روزمرہ زندگی میں کئی عملی استعمال اور فوائد ہیں۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ فوٹو گرافر ایک ہی نیگیٹو (منفی عکس) کو اجاگر کر کے اس سے مختلف سائز کے فوٹو (مثبت عکس) تیار کر سکتا ہے۔ سائز کے فرق کے باوجود یہ تصاویر ایک دوسری سے ملتی جلتی لگتی ہیں۔ ایک فوٹو دوسری کی محض انلارج (بڑی) کی ہوئی تصویر ہوتی ہے۔ ایسی اشکال کو متشابہ کہتے ہیں۔ جیومیٹریکل اشکال بھی متشابہ ہوسکتی ہیں۔

مثلاً اگر مطابقت $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta DEF$ میں

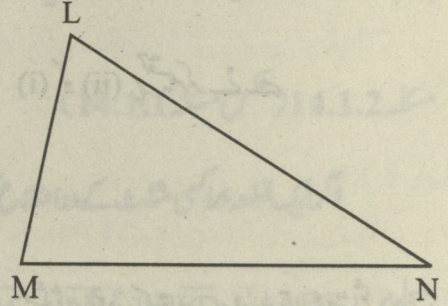
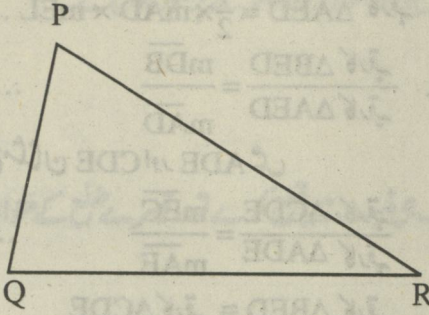
$\angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F$ اور $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ ہو

تو ΔABC اور ΔDEF متشابہ مثلثیں کہلاتی ہیں۔ جسے علامتی طور پر $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ لکھا جاتا ہے۔

اس سے مراد یہ ہے کہ متشابہ مثلثوں کے متناظرہ زاویے متماثل ہوتے ہیں اور ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

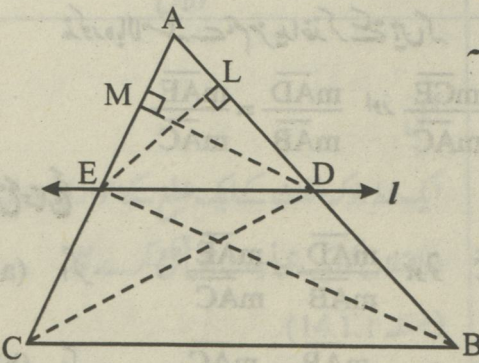
$\Delta PQR \cong \Delta LMN$ کا مطلب یہ ہے کہ مطابقت $\Delta PQR \longleftrightarrow \Delta LMN$ میں

$\angle P \cong \angle L, \angle Q \cong \angle M, \angle R \cong \angle N$ اور $\overline{PQ} \cong \overline{LM}, \overline{QR} \cong \overline{MN}, \overline{RP} \cong \overline{NL}$

اب چونکہ $\frac{PQ}{LM} = \frac{QR}{MN} = \frac{RP}{NL} = 1$

اس لیے $\Delta PQR \sim \Delta LMN$

یعنی دو متماثل مثلثیں متشابہ بھی ہوتی ہیں لیکن دو متشابہ مثلثوں کا متماثل ہونا ضروری نہیں کیونکہ ان کے متناظرہ اضلاع کا متماثل ہونا لازم نہیں ہوتا۔

مسئلہ 14.1.1

اگر کوئی خط مستقیم مثلث کے کسی ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو وہ باقی دونوں ضلعوں کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔

معلوم ΔABC میں خط l اضلاع $\overline{AC}$ اور $\overline{AB}$ کو بالترتیب نقاط E اور D پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$

مطلوب $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$

عمل نقطہ B کو E سے اور نقطہ C کو D سے ملائیں۔ نقطہ D سے $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ اور نقطہ E سے $\overline{EL} \perp \overline{AB}$ کھینچیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
	مثلثان BED اور AED میں $\overline{EL}$ ایک مشترک عمود ہے۔
ارتفاع × قاعدہ × $\frac{1}{2}$ = مثلث کا رقبہ	$\therefore$ ΔBED کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times m\overline{DB} \times m\overline{EL}$ ...... (i)
	ΔAED کا رقبہ $= \frac{1}{2} \times m\overline{AD} \times m\overline{EL}$ ...... (ii)
(i) کو (ii) پر تقسیم کرنے سے	$\therefore$ $\frac{\Delta BED \text{ کا رقبہ}}{\Delta AED \text{ کا رقبہ}} = \frac{m\overline{DB}}{m\overline{AD}}$ ...... (iii)
	اسی طرح مثلثان CDE اور ADE میں
	$\frac{\Delta CDE \text{ کا رقبہ}}{\Delta ADE \text{ کا رقبہ}} = \frac{m\overline{EC}}{m\overline{AE}}$ ...... (iv)
مثلثان جن کے قاعدے اور ارتفاع متماثل ہوں ہم رقبہ ہوتی ہیں۔ $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$ معلوم ہے۔ پس ارتفاع متماثل ہیں۔	لیکن ΔBED کا رقبہ $\cong$ ΔCDE کا رقبہ
(iii) اور (iv) کی رو سے	اس لیے $\frac{m\overline{DB}}{m\overline{AD}} = \frac{m\overline{EC}}{m\overline{AE}}$
دونوں اطراف کا معکوس لینے سے	لہٰذا $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$
	پس $m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$

مشاہدہ کریں

مذکورہ بالا مسئلہ سے ہم مزید اخذ کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{m\overline{BD}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{CE}}{m\overline{AC}} \quad \text{اور} \quad \frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$$

صریح نتائج

(a) اگر $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{AC}}$ ہو تو $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

(b) اگر $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{EC}}$ ہو تو $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

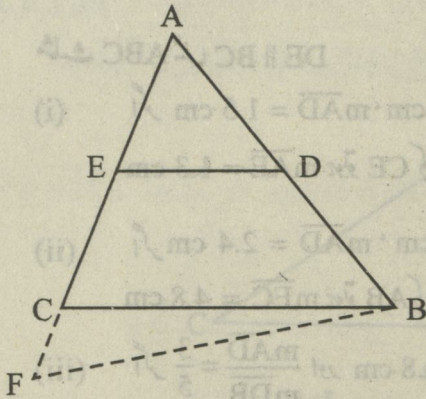
یادرکھنے کی باتیں

(i) دو نقاط ایک خط کا جبکہ تین غیر ہم خط نقاط ایک مستوی کا تعین کرتے ہیں۔

(ii) ایک قطعہ خط کا صرف اور صرف ایک ہی نقطہ تنصیف ہوتا ہے۔

(iii) اگر دو متقاطع خطوط کے متصلہ زاویے متماثل ہوں تو وہ خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے۔

مسئلہ 14.1.2 (عکس مسئلہ 14.1.1)

اگر ایک قطعہ خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے تو وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہوگا۔

معلوم ΔABC میں $\overline{ED}$ اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$ کو اسی طرح قطع کرتا ہے کہ

$$m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$$

مطلوب $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$

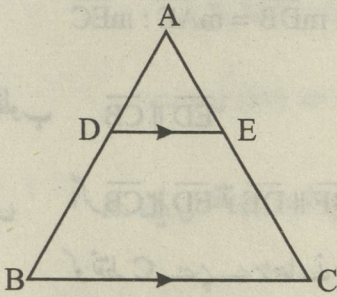
عمل اگر $\overline{ED} \nparallel \overline{CB}$ تو $\overline{BF} \parallel \overline{DE}$ کھینچیں جو کہ $\overline{AC}$ کو نقطہ C سے پرے بڑھانے پر نقطہ F پر ملتا ہے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
مثلث ABF میں	
$\overline{DE} \parallel \overline{BF}$	عمل
$\therefore \quad \dfrac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \dfrac{m\overline{AE}}{m\overline{EF}}$ …… (i)	ایک خط جو کہ مثلث کے ایک ضلع کے متوازی ہو وہ باقی دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔ (مسئلہ 14.1.1)

بیان	وجہ
لیکن	
$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$ ...... (ii)	معلوم
$\therefore \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EF}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{EC}}$	(i) اور (ii) کی رو سے
یا $m\overline{EF} = m\overline{EC}$	حقیقی اعداد کی خصوصیت
اس طرح نقطہ F نقطہ C پر منطبق ہے۔	
لہٰذا ہمارا مفروضہ غلط ہے	
پس $\overline{ED} \parallel \overline{CB}$	

مشق 14.1

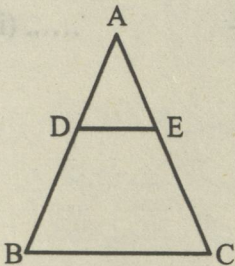
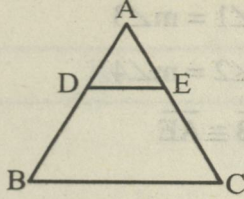
1۔ مثلث ABC میں $DE \parallel BC$

(i) اگر $m\overline{AD} = 1.5$ cm، $m\overline{BD} = 3$ cm،
$m\overline{AE} = 1.3$ cm ہو تو CE کی لمبائی معلوم کریں۔

(ii) اگر $m\overline{AD} = 2.4$ cm، $m\overline{AE} = 3.2$ cm،
$m\overline{EC} = 4.8$ cm ہو تو AB کی لمبائی معلوم کریں۔

(iii) اگر $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{DB}} = \frac{3}{5}$ اور $m\overline{AC} = 4.8$ cm ہو تو
$\overline{AE}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

(iv) اگر $m\overline{AD} = 2.4$ cm، $m\overline{AE} = 3.2$ cm، $m\overline{DE} = 2$ cm، $m\overline{BC} = 5$ cm ہو تو
$\overline{AB}$، $\overline{DB}$، $\overline{AC}$ اور $\overline{CE}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

(v) اگر $m\overline{AD} = 4x - 3$، $m\overline{AE} = 8x - 7$، $m\overline{BD} = 3x - 1$
اور $m\overline{CE} = 5x - 3$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔

2۔ ایک مساوی الساقین مثلث ABC میں $\angle A$ راسی زاویہ ہے۔
اگر $\overline{DE}$ مثلث کے اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AC}$
کو دی گئی شکل کے مطابق اس طرح قطع کرے کہ
$m\overline{AD} : m\overline{DB} = m\overline{AE} : m\overline{EC}$
تو ثابت کریں کہ ΔADE بھی ایک مساوی الساقین مثلث ہوگی۔

3- ایک متماثل اضلاع مثلث ABC کے اضلاع میں نسبت

$m\overline{AE} : m\overline{AC} = m\overline{AD} : m\overline{AB}$ ہو تو مثلث ADE

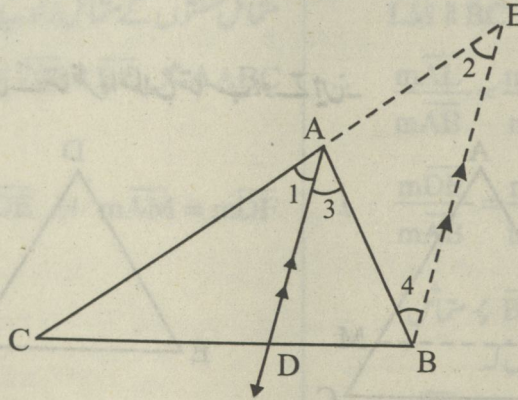
کے تمام زاویوں کی مقداریں معلوم کریں اور ان کے نام

بھی لکھیں۔

4- ثابت کریں کہ ایسا قطعہ خط جو کسی مثلث کے ایک ضلع کے
وسطی نقطہ سے دوسرے ضلع کے متوازی کھینچا گیا ہو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کرتا ہے۔

5- ثابت کریں کہ کسی مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے۔

مسئلہ 14.1.3

مثلث کے کسی اندرونی زاویے کا ناصف مقابل کے ضلع کو اسی نسبت میں قطع کرتا ہے جو مثلث کے ان دونوں اضلاع کی مقداروں میں ہوتی ہے جو اس زاویہ کی دونوں شعاعوں پر واقع ہوتے ہیں۔

معلوم: مثلث ABC کے اندرونی زاویہ A کا ناصف ضلع $\overline{CB}$ کو نقطہ D پر قطع کرتا ہے۔

مطلوب: $m\overline{BD} : m\overline{DC} = m\overline{AB} : m\overline{AC}$

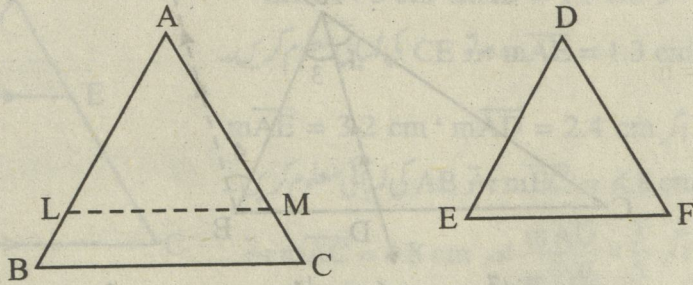
عمل: $\overline{BE} \parallel \overline{DA}$ کھینچیں جو کہ ضلع $\overline{CA}$ کو بڑھانے پر نقطہ E پر قطع کرتا ہے۔

ثبوت

بیانات	دلائل
چونکہ $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$ اور $\overline{EC}$ ان کو قطع کرتا ہے	عمل
$\therefore \quad m\angle 1 = m\angle 2$ ...... (i)	متناظرہ زاویے
مزید $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$ اور $\overline{AB}$ ان کو قطع کرتا ہے۔	
$\therefore \quad m\angle 3 = m\angle 4$ ...... (ii)	متبادلہ زاویے

بیانات	وجوہات
یقین $m\angle 1 = m\angle 3$	معلوم
$\therefore\ m\angle 2 = m\angle 4$	(i) اور (ii) کی روسے
$\therefore\ \overline{AB} \cong \overline{AE}$	مثلث کے متماثل زاویوں کے سامنے والے اضلاع متماثل ہوتے ہیں۔
یا $\overline{AE} \cong \overline{AB}$	
اب ΔCBE میں $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$	عمل
$\therefore\ \dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{EA}}{m\overline{AC}}$	
یا $\dfrac{m\overline{BD}}{m\overline{DC}} = \dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{AC}}$	$m\overline{EA} = m\overline{AB}$ (ثابت شدہ)
پس $m\overline{BD} : m\overline{DC} = m\overline{AB} : m\overline{AC}$	

مسئلہ 14.1.4

دو متشابہ مثلثوں کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

معلوم $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

یعنی $\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E$ and $\angle C \cong \angle F$

مطلوب $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$

عمل (I) فرض کیا $m\overline{AB} > m\overline{DE}$

(II) $m\overline{AB} \leq m\overline{DE}$

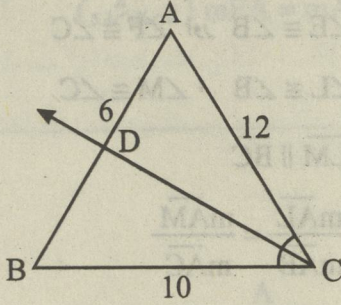
$\overline{AB}$ پر نقطہ L اس طرح لیں کہ $m\overline{AL} = m\overline{DE}$

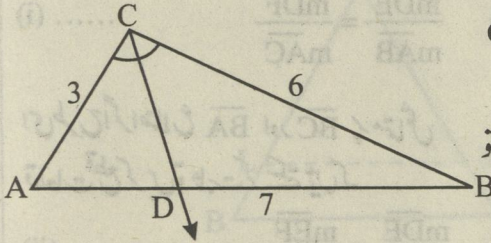
$\overline{AC}$ پر نقطہ M اس طرح لیں کہ $m\overline{AM} = m\overline{DF}$ ، قطعہ خط LM کے ذریعہ نقطہ L کو نقطہ M سے ملائیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
(I) $\Delta ALM \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں	
$\angle A \cong \angle D$	معلوم
$\overline{AL} \cong \overline{DE}$	عمل
$\overline{AM} \cong \overline{DF}$	عمل
پس $\Delta ALM \cong \Delta DEF$	S.A.S موضوعہ
اور $\angle L \cong \angle E$ ، $\angle M \cong \angle F$	متماثل مثلثوں کے متناظرہ زاویے
اب $\angle E \cong \angle B$ اور $\angle F \cong \angle C$	معلوم
$\therefore$ $\angle L \cong \angle B$ ، $\angle M \cong \angle C$	متماثل کی ثلاثی خاصیت
پس $\overline{LM} \parallel \overline{BC}$	متماثل مثلثوں کے متماثل زاویے
$\therefore$ $\dfrac{m\overline{AL}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{AM}}{m\overline{AC}}$	ΔABC میں $\overline{LM} \parallel \overline{BC}$ (ثابت شدہ)
یا $\dfrac{m\overline{DE}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{DF}}{m\overline{AC}}$ ...... (i)	$m\overline{AL} = m\overline{DE}$ اور $m\overline{AM} = m\overline{DF}$ (عمل)
اسی طرح اگر اضلاع $\overline{BA}$ اور $\overline{BC}$ پر متماثل قطعات قطع کریں تو ثابت کر سکتے ہیں کہ	
$\dfrac{m\overline{DE}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{BC}}$ ...... (ii)	
پس $\dfrac{m\overline{DE}}{m\overline{AB}} = \dfrac{m\overline{DF}}{m\overline{AC}} = \dfrac{m\overline{EF}}{m\overline{BC}}$	(i)اور(ii) کی رو سے
یا $\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}}$	معکوس لینے سے
(II) اگر $m\overline{AB} < m\overline{DE}$ ہو تو اسی طرح ثابت کر سکتے ہیں اگر مثلث DEF پر متماثل قطعات لے لیں۔	
اگر $m\overline{AB} = m\overline{DE}$	
تو $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں	

	بیانات	وجوہات
	$\angle A \cong \angle D$	معلوم
	$\angle B \cong \angle E$	معلوم
اور	$\overline{AB} \cong \overline{DE}$	مفروض
لہٰذا	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$	A.S.A. ≅ A.S.A
پس	$\dfrac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = \dfrac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}} = \dfrac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = 1$	$m\overline{AC} \cong m\overline{DF}, m\overline{BC} \cong m\overline{EF}$ (مثلثوں کا تماثل)
	لہٰذا تمام صورتوں میں نتیجہ درست ہے۔	

مشق 14.2

1۔ سامنے کی شکل میں ΔABC میں $\angle C$ کا ناصف $\overrightarrow{CD}$ ضلع $\overline{AB}$ کو نقطہ D پر قطع کرے تو $m\overline{BD}$ کی قیمت برابر ہوگی:

(a) 5 (b) 16 (c) 10 (d) 18

2۔ دی گئی شکل کے مطابق مثلث ABC میں $\overrightarrow{CD}$ زاویہ C کا ناصف ہے۔

اگر $m\overline{AC} = 3$ ، $m\overline{CB} = 6$ اور $m\overline{AB} = 7$ ہو تو $m\overline{AD}$ اور $m\overline{DB}$ معلوم کریں۔

3۔ اگر کسی دی گئی دو مثلثوں کی مطابقت میں ایک مثلث کے دو زاویے دوسری مثلث کے متناظرہ زاویوں کے متماثل ہوں تو ثابت کریں کہ مثلثیں متشابہ ہوں گی۔

4۔ قطعات خط AB اور CD ایک دوسرے کو نقطہ X پر قطع کرتے ہیں۔ اگر $\dfrac{m\overline{AX}}{m\overline{XB}} = \dfrac{m\overline{CX}}{m\overline{XD}}$ ہو تو ثابت کریں کہ ΔAXC اور ΔBXD متشابہ ہوں گی۔

اعادہ مشق 14

1۔ درست اور غلط بیانات کی نشاندہی کریں۔

(i) متماثل مثلثان سائز اور شکل میں ایک جیسی ہوتی ہیں۔ ....

(ii) متشابہ مثلثان کی شکل ایک جیسی لیکن ان کے سائز مختلف ہوتے ہیں۔ ....

(iii) متماثل کے لیے علامت '~' استعمال ہوتی ہے۔ ....

(iv) متشابہ کے لیے علامت '≅' استعمال ہوتی ہے۔ ....

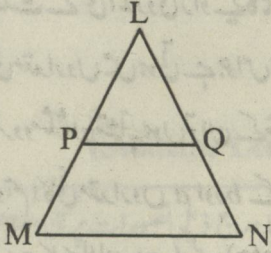
(v) متماثل مثلثیں متشابہ ہوتی ہیں۔ .... (vi) متشابہ مثلثیں متماثل ہوتی ہیں۔ ....

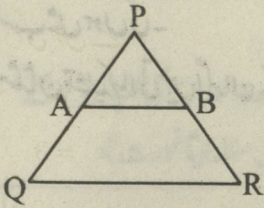
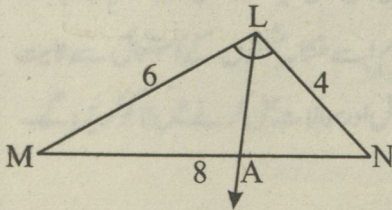
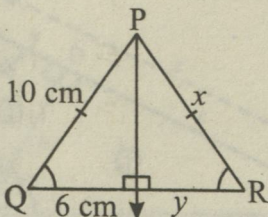
(vii) کسی قطعہ خط کا صرف ایک ہی نقطہ تنصیف ہوتا ہے۔ (viii) دو نقاط میں سے ایک اور صرف ایک خط کھینچا جا سکتا ہے۔

(ix) دو نسبتوں کے غیر برابر ہونے کو تناسب کہتے ہیں۔ (x) نسبت کی کوئی اکائی نہیں ہوتی۔ ....

2۔ مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کریں۔

(i) نسبت (ii) تناسب (iii) متماثل مثلثان (iv) متشابہ مثلثان

3۔ سامنے دی گئی شکل کی مثلث LMN میں $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ ہے۔

(i) اگر $m\overline{LP} = 2.5$ cm ، $m\overline{LM} = 5$ cm اور $m\overline{LQ} = 2.3$ cm ہو تو $m\overline{LN}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

(ii) اگر $m\overline{LQ} = 2.5$ cm ، $m\overline{LM} = 6$ cm اور $m\overline{QN} = 5$ cm ہو تو $m\overline{LP}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

4۔ سامنے کی شکل میں اگر $m\overline{PA} = 8x - 7$ ، $m\overline{PB} = 4x - 3$ ، $m\overline{AQ} = 5x - 3$ اور $m\overline{BR} = 3x - 1$ ہو تو x کی قیمت معلوم کریں جبکہ $\overline{AB} \parallel \overline{QR}$

5۔ سامنے کی شکل میں دکھائی گئی ΔLMN میں $\overrightarrow{LA}$ زاویہ L کی ناصف شعاع ہے۔ اگر $m\overline{LN} = 4$ ، $m\overline{LM} = 6$ اور $m\overline{MN} = 8$ ہو تو $m\overline{MA}$ اور $m\overline{AN}$ معلوم کریں۔

6۔ سامنے کی شکل میں ΔPQR ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔
x اور y کی قیمت معلوم کریں۔

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے مندرجہ ذیل مسئلے بیان اور ثابت کیے۔ علاوہ ازیں چند ضروری اصطلاحات کی تعریف کی۔

☆ اگر کوئی خط مستقیم مثلث کے کسی ضلع کے متوازی کھینچا جائے تو وہ باقی دونوں ضلعوں کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے گا۔

☆ اگر ایک قطعہ خط کسی مثلث کے دو اضلاع کو ایک ہی نسبت میں قطع کرے تو وہ تیسرے ضلع کے متوازی ہو گا۔

☆ مثلث کے کسی اندرونی زاویے کا ناصف مقابل کے ضلع کو اسی نسبت میں قطع کرتا ہے جو مثلث کے ان دونوں اضلاع کی مقداروں میں ہوتی ہے جو اس زاویہ کی دونوں شعاعوں پر واقع ہوتے ہیں۔

☆ اگر دو مثلثان متشابہ ہوں تو ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

☆ دو ہم اکائی مقداروں a اور b کے درمیان نسبت کی تعریف $a : b = \frac{a}{b}$ کے طور پر کی جبکہ مقداریں a اور b نسبت $a : b$ کا پہلا اور دوسرا رکن (elements) کہلاتی ہیں۔

دو نسبتوں کے درمیان برابری کے تعلق کو تناسب کہتے ہیں۔ یعنی اگر $a : b = c : d$ تو مقداریں a، b، c اور d تناسب میں ہوں گی۔

دو مثلثان متشابہ کہلاتی ہیں اگر ان کے متناظرہ زاویے متماثل اور ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوں۔

یونٹ 15

مسئلہ فیثا غورث

(PYTHAGORAS' THEOREM)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

15.1 مسئلہ فیثا غورث (Pythagoras' Theorem)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے ہم وسیع تر ماحصل/ نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اُس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہوں گے کہ:

☆ ثابت کر سکیں کہ قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔ (مسئلہ فیثا غورث)

☆ ثابت کر سکیں کہ اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی کا مربع دوسرے دو اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگی۔ (عکس مسئلہ فیثا غورث)

تعارف

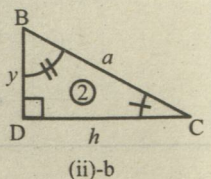
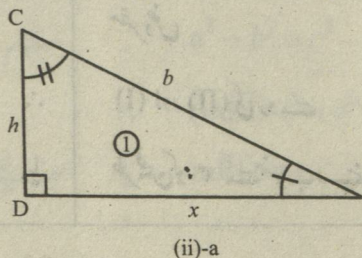
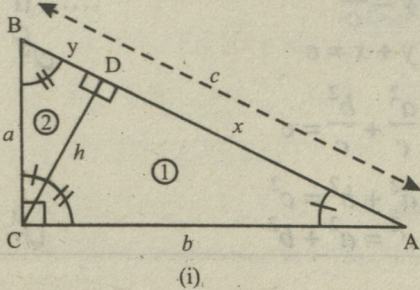
فیثا غورث ایک یونانی فلسفی اور ریاضی دان تھا۔ اس نے قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع کے درمیان ایک آسان لیکن اہم تعلق دریافت کیا۔ اُس نے اضلاع کے اِس تعلق کو ایک فارمولے کی شکل میں وضع کیا جسے اس کے نام کی وجہ سے مسئلہ فیثا غورث کہا جاتا ہے۔ اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے متعدد طریقے ہیں۔ ہم اسے متشابہ مثلثوں کے استعمال سے ثابت کریں گے۔ ہم اس کا عکس مسئلہ بھی بیان اور ثابت کریں گے اور پھر انہیں مختلف مسائل اور سوالات حل کرنے میں لاگو کریں گے۔

15.1.1 مسئلہ فیثا غورث

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

(i)

(ii)-a

(ii)-b

معلوم
ΔACB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں $m\angle C = 90°$ اور $m\overline{BC} = a$ ، $m\overline{AC} = b$ اور
$m\overline{AB} = c$

مطلوب $c^2 = a^2 + b^2$

عمل نقطہ C سے ضلع $\overline{AB}$ پر $\overline{CD}$ عمود گرائیں۔ فرض کریں $m\overline{CD} = h$ ، $m\overline{AD} = x$ اور $m\overline{BD} = y$
قطعہ خط CD مثلث ABC کو دو مثلثان ADC اور BDC میں تقسیم کرتا ہے۔ جیسا کہ اشکال a(ii) اور b(ii) میں بالترتیب دکھایا گیا ہے۔

ثبوت (متشابہ مثلثوں کے استعمال سے)

بیانات	دلائل
میں $\Delta ADC \longleftrightarrow \Delta ACB$	بحوالہ اشکال (i) اور a(ii)
$\angle A \cong \angle A$	مشترک یا ذاتی تماثل
$\angle ADC \cong \angle ACB$	عمل۔ معلوم، ہر ایک قائمۃ زاویہ ہے
$\angle C \cong \angle B$	$\angle C$ اور $\angle B$ زاویہ $\angle A$ کے کمپلیمنٹ
$\therefore \quad \Delta ADC \sim \Delta ACB$	تینوں زاویے متماثل ہیں
$\therefore \quad \frac{x}{b} = \frac{b}{c}$	دو متشابہ مثلثان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں
یا $\quad x = \frac{b^2}{c}$ I	
اب میں $\Delta BDC \longleftrightarrow \Delta BCA$	بحوالہ اشکال (i) اور b(ii)
$\angle B \cong \angle B$	مشترک یا ذاتی تماثل
$\angle BDC \cong \angle BCA$	عمل۔ معلوم، ہر زاویہ قائمہ ہے
$\angle C \cong \angle A$	$\angle C$ اور $\angle A$ زاویہ B کے کمپلیمنٹ
$\therefore \quad \Delta BDC \sim \Delta BCA$	تینوں زاویے متماثل ہیں
$\therefore \quad \frac{y}{a} = \frac{a}{c}$	دو متشابہ مثلثان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں
یا $\quad y = \frac{a^2}{c}$ II	
لیکن $\quad y + x = c$	مفروض
$\therefore \quad \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$	(I) اور (II) کی رو سے
یا $\quad a^2 + b^2 = c^2$	طرفین کو c سے ضرب دینے سے
پس $\quad c^2 = a^2 + b^2$	

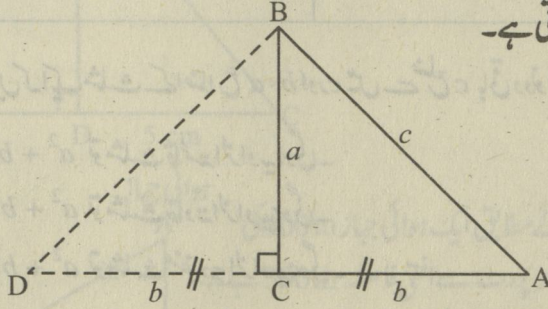
صریح نتائج: قائمۃ الزاویہ مثلث ABC میں جس کا زاویہ A قائمہ ہے

$$(AB)^2 = (BC)^2 - (CA)^2 \quad (i)$$

$$(AC)^2 = (BC)^2 - (AB)^2 \quad (ii)$$

اضافی نقطہ: ویسے تو مسئلہ فیثا غورث کے متعدد ثبوت ہیں لیکن ہم نے جس طریقہ سے مسئلہ کو ثابت کیا ہے وہ متشابہ مثلثان کے اضلاع کے متناسب ہونے پر مبنی ہے۔ہم نے آسانی سے سمجھ میں آنے کے لیے مثلثان ADC اور CDB کو علیحدہ دکھایا ہے ورنہ عام طور پر صرف شکل (i) سے ہی مسئلہ فیثا غورث ثابت کیا جاتا ہے ۔

مسئلہ 15.1.2 (عکس مسئلہ فیثا غورث 15.1.1)

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوتی ہے۔

معلوم مثلث ABC میں: $m\overline{AB} = c$، $m\overline{BC} = a$ اور $m\overline{AC} = b$ اس طرح کہ $a^2 + b^2 = c^2$ ۔

مطلوب $m\angle ACB = 90°$، یعنی ΔACB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

عمل $\overline{BC}$ پر $\overline{CD}$ عمود اس طرح گرائیں کہ $\overline{CD} \cong \overline{CA}$ نقطہ B کو نقطہ D سے ملائیں۔

بیانات	دلائل
مثلث DCB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔	عمل
$\therefore \quad (m\overline{BD})^2 = a^2 + b^2$	مسئلہ فیثا غورث
لیکن $a^2 + b^2 = c^2$	معلوم
$\therefore \quad (m\overline{BD})^2 = c^2$	
یا $m\overline{BD} = c$	جذر لینے سے

اب مطابقت $\Delta DCB \leftrightarrow \Delta ACB$ میں	
$\overline{CD} \cong \overline{CA}$	عمل
$\overline{BC} \cong \overline{BC}$	مشترک
$\overline{BD} \cong \overline{AB}$	دونوں c کے برابر ہیں
$\therefore \quad \Delta DCB \cong \Delta ACB$	ض۔ض۔ض ≅ ض۔ض۔ض
$\therefore \quad \angle DCB \cong \angle ACB$	متماثل مثلثان کے زاویے متماثل ہوتے ہیں
لیکن $m\angle DCB = 90°$	عمل
$\therefore \quad m\angle ACB = 90°$	
پس ΔACB ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔	

صریح نتائج : فرض کریں کہ ایک مثلث کے اضلاع a ، b اور c میں سے ضلع c باقی دونوں اضلاع سے لمبائی میں زیادہ ہے۔

☆ اگر $a^2 + b^2 = c^2$ تو مثلث قائمۃ الزاویہ ہوگی۔

☆ اگر $a^2 + b^2 > c^2$ تو مثلث حادۃ الزاویہ ہوگی۔

☆ اگر $a^2 + b^2 < c^2$ تو مثلث منفرجۃ الزاویہ ہوگی۔

مشق 15.1

1۔ مثلثان کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہیں۔ تصدیق کریں کہ یہ مثلثان قائمۃ الزاویہ ہیں۔

(i) $a = 5$ cm ، $b = 12$ cm ، $c = 13$ cm

(ii) $a = 1.5$ cm ، $b = 2$ cm ، $c = 2.5$ cm

(iii) $a = 9$ cm ، $b = 12$ cm ، $c = 15$ cm

(iv) $a = 16$ cm ، $b = 30$ cm ، $c = 34$ cm

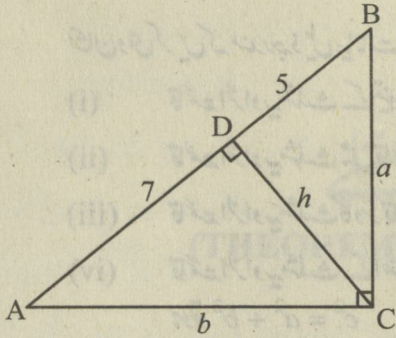
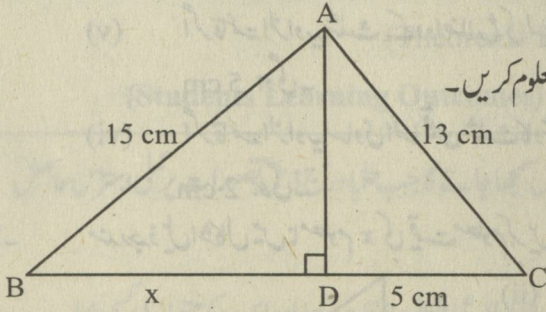
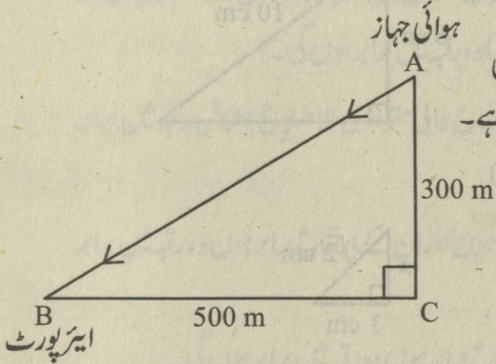
2۔ تصدیق کریں کہ $a^2 + b^2$ ، $a^2 - b^2$ اور $2ab$ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہوں گی جبکہ a اور b $(a > b)$ کوئی سے دو حقیقی اعداد ہوں۔

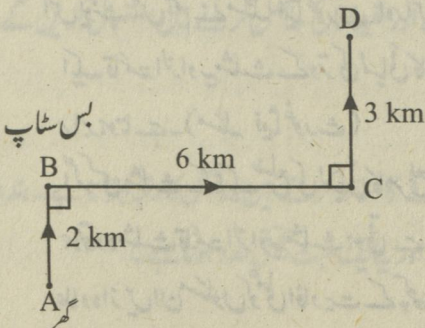
3۔ ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں بالترتیب x ، 8 اور 17 ہیں۔ x کی کس قیمت کے لیے یہ ضلع قائمۃ الزاویہ مثلث کا قاعدہ بن جائے گا؟

4۔ ایک مساوی الساقین مثلث میں قاعدہ $m\overline{BC} = 28$ cm اور $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 50$ cm ہیں۔ اگر $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ہو تو (i) $\overline{AD}$ کی لمبائی (ii) ΔABC کا رقبہ معلوم کریں۔

5۔ ایک چوکور ABCD کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک دوسرے پر عمود ہیں۔ ثابت کریں کہ

$$(AB)^2 + (CD)^2 = (AD)^2 + (BC)^2$$

6۔ (i) سامنے دی گئی شکل میں ABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے جس میں $m\angle ACB = 90^\circ$ اور $\overline{CD}$ عمود ہے $\overline{AB}$ پر۔ اگر $m\overline{BD} = 5$ اور $m\overline{AD} = 7$ ہو تو a، h اور b کی لمبائیاں معلوم کریں۔

(ii) سامنے دی گئی شکل سے x کی لمبائی معلوم کریں۔

7۔ سامنے دی گئی شکل کے مطابق ایک ہوائی جہاز 300m کی بلندی پر ہے اس کا ایئرپورٹ سے افقی فاصلہ 500m ہے۔ اس کو ایئرپورٹ پر اترنے کے لیے (تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے) کتنا فاصلہ طے کرنا پڑے گا؟

8۔ 17 m لمبائی والی سیڑھی ایک عمودی دیوار کے سہارے کھڑی ہے اس کا نچلا پایہ دیوار کی بنیاد سے 8 m کے فاصلے پر ہے۔ سیڑھی دیوار کی بنیاد سے کتنی اونچائی پر دیوار کے سہارے کھڑی ہوگی؟

9۔ ایک طالب علم اپنے گھر سے سکول تک کا فاصلہ شکل میں دکھائے گئے روٹ کے مطابق طے کرتا ہے۔ اس کے گھر سے سکول تک کا براہ راست فاصلہ $m\overline{AD}$ معلوم کریں۔

اعادہ مشق 15

1۔ نشان دہی کریں کہ مندرجہ ذیل بیانات میں سے کون سے صحیح اور کون سے غلط ہیں؟

(i) قائمۃ الزاویہ مثلث کے تینوں زاویوں میں سے بڑا زاویہ 90° ہوتا ہے۔ ....

(ii) قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ 60° کے برابر ہوتا ہے۔ ....

(iii) قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر قائمہ زاویے کے سامنے والا ضلع ہوتا ہے۔ ....

(iv) قائمۃ الزاویہ مثلث کے اضلاع a، b اور c میں سے اگر ضلع c باقی دونوں اضلاع کی نسبت زیادہ لمبا ہو تو $c^2 = a^2 + b^2$ ....

(v) اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 3 cm اور 4 cm ہوں تو وتر کی لمبائی 5 cm ہوگی۔ ....

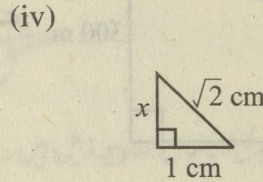
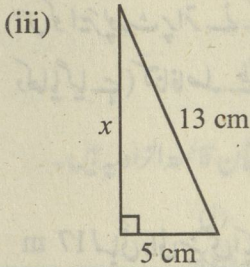
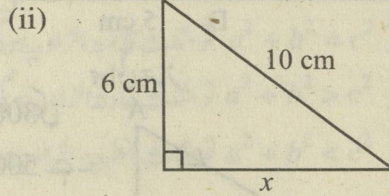
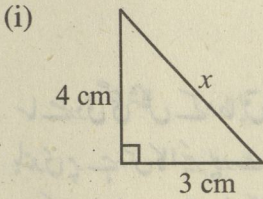
(vi) اگر قائمۃ الزاویہ مساوی الساقین مثلث کا وتر $\sqrt{2}$ cm ہو تو باقی دونوں اضلاع میں سے ہر ایک کی لمبائی 2 cm ہوگی۔ ....

2۔ مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم x کی قیمت معلوم کریں۔

(i) 4 cm، 3 cm، x

(ii) 6 cm، 10 cm، x

(iii) x، 13 cm، 5 cm

(iv) x، $\sqrt{2}$ cm، 1 cm

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے مسئلہ فیثاغورث اور اس کا عکس بمعہ صریح نتائج بیان کرنا اور ثابت کرنا سیکھے۔

☆ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔ (مسئلہ فیثاغورث)

☆ اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کی لمبائی کا مربع دوسرے دونوں اضلاع کی لمبائیوں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہو تو وہ مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہوتی ہے۔ (عکس مسئلہ فیثاغورث)

علاوہ ازیں ان مسئلوں کو عملی افادیت کے کچھ سوالات حل کرنے میں استعمال کیا گیا۔

یونٹ 16

رقبہ سے متعلق مسئلے

(THEOREMS RELATED WITH AREA)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

16.1 رقبہ سے متعلق مسئلے (Theorems Related with Area)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ماحصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

☆ ثابت کر سکیں کہ ایک ہی قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ ثابت کر سکیں کہ برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔

☆ ثابت کر سکیں کہ ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ ثابت کر سکیں کہ ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

تعارف

اس یونٹ میں ہم کچھ اہم مسئلے اور ان کے نتائج صریح بیان اور ثابت کریں گے جن کا تعلق متوازی الاضلاع اشکال اور مثلثوں کے رقبے سے ہے۔ پھر ان کو کچھ مناسب سوالات حل کرنے اور مفید نتائج حاصل کرنے میں استعمال کریں گے۔

کچھ بنیادی تصورات

کسی شکل کا رقبہ

کسی بند شکل کی حد بندی کرنے والے قطعات خط جس علاقے کا احاطہ کرتے ہیں وہ شکل کا رقبہ کہلاتا ہے۔ بند علاقے کے رقبے کو مربع اکائیوں (جیسے m^2 یا مربع میٹر) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اور یہ ایک مثبت حقیقی عدد ہوتا ہے۔

مثلثی علاقہ

مستوی کے ایسے تمام نقاط کا سیٹ جو کسی مثلث کے اندر ہوں مثلث کا اندرونہ کہلاتا ہے۔

کسی مثلث اور اس کے اندرونہ کے یونین (union) کو مثلثی علاقہ کہتے ہیں۔ (یعنی مثلث بنانے والے تینوں قطعات خط اور مثلث کے اندرونہ کا یونین)۔ اس کا مطلب یہ ہوا کہ مثلثی علاقہ ہی مثلث کا رقبہ کہلائے گا۔

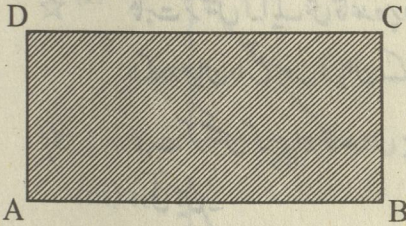
متماثل رقبوں کا اصول متعارفہ (Congruent Area Axion)

اگر $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

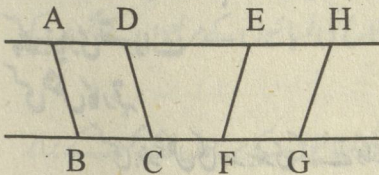
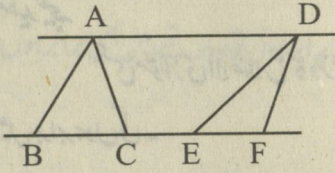
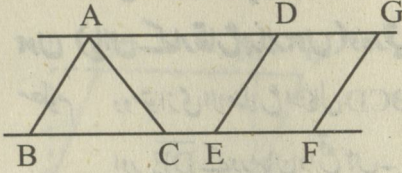
تو مثلثی علاقہ PQR کا رقبہ = مثلثی علاقہ ABC کا رقبہ

مستطیلی علاقہ

مستوی کے ایسے تمام نقاط کا سیٹ جو کسی مستطیل کے اندر واقع ہوں مستطیل کا اندرونہ کہلاتا ہے۔

کسی مستطیل اور اس کے اندرونہ کے یونین کو مستطیلی علاقہ کہتے ہیں۔ مستطیلی علاقہ کو کئی طریقوں سے دو یا دو سے زیادہ مثلثی علاقوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

آپ کے ذہن میں ہوگا کہ اگر کسی مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب a اکائیاں اور b اکائیاں ہوں تو مستطیل کا رقبہ $a \times b$ مربع اکائیاں ہوتا ہے۔ علاوہ ازیں اگر کسی مربع کے ایک ضلع کی لمبائی 'a' ہو تو اس کا رقبہ 'a^2' مربع اکائیوں کے برابر ہوتا ہے۔

اشکال کا دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہونا

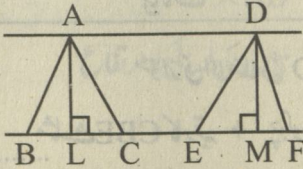
دو متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH اس وقت متوازی خطوط کے درمیان واقع سمجھی جاتی ہیں جب ان کے قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{FG}$ ایک ہی خط BCFG کے ساتھ ہم خط ہوں اور ان قاعدوں کے متقابہ اضلاع $\overline{AD}$ اور $\overline{EH}$ بھی متوازی خط ADEH کے ہم خط ہوں۔

سامنے دی گئی شکل میں دکھائی گئی دو مثلثیں ABC اور DEF دو متوازی خطوط کے درمیان واقع سمجھی جائیں گی جب ان کے قاعدے ہم خط ہوں اور ان کے راسوں کو ملانے والا خط قاعدوں کے متوازی ہو۔

سامنے دی گئی شکل میں دکھائی گئی ΔABC متوازی الاضلاع DEFG دو متوازی خطوط کے درمیان واقع سمجھی جائیں گی جب ان کے قاعدے ہم خط ہوں اور متوازی الاضلاع کے قاعدے کا بالمقابل ضلع ،ضرورت پڑنے پر بڑھانے سے، مثلث کے راس میں سے گزرے۔

تعریف

اگر کسی متوازی الاضلاع کے ایک ضلع کو قاعدہ مان لیا جائے تو قاعدہ اور اس کے متوازی ضلع کے درمیان عمودی فاصلہ کو متوازی الاضلاع کا ارتفاع کہتے ہیں۔

تعریف

اگر کسی مثلث کے ایک ضلع کو قاعدہ مان لیا جائے تو مخالف راس سے اس قاعدہ تک عمودی فاصلہ مثلث کا ارتفاع کہلاتا ہے۔

مفید نتیجہ

”برابر ارتفاع والی مثلثوں اور متوازی الاضلاع اشکال کو دو متوازی خطوط کے درمیان رکھا جا سکتا ہے۔ اور اس کا عکس نتیجہ بھی درست ہے۔“

مثلثان ABC اور DEF کو اس طرح لیں کہ ان کے قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ ہم خط ہوں اور ان کے راس A اور D اس خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔ فرض کریں کہ ان کے ارتفاع $\overline{AL}$ اور $\overline{DM}$ لمبائی میں برابر ہیں۔ ہم نے ثابت کرنا ہے کہ $\overline{AD}$ خط BCEF کے متوازی ہے۔

ثبوت چونکہ $\overline{DM} \perp \overline{BF}$ اور $\overline{AL} \perp \overline{BF}$

اس لیے $\overline{AL} \parallel \overline{DM}$ (دونوں ایک ہی قطعہ خط BF پر عمود ہیں)۔

علاوہ ازیں $m\overline{AL} = m\overline{DM}$ (معلوم)

لہٰذا $\overline{AD} \parallel \overline{LM}$ ، یعنی $\overline{AD}$ خط BCEF کے متوازی ہے

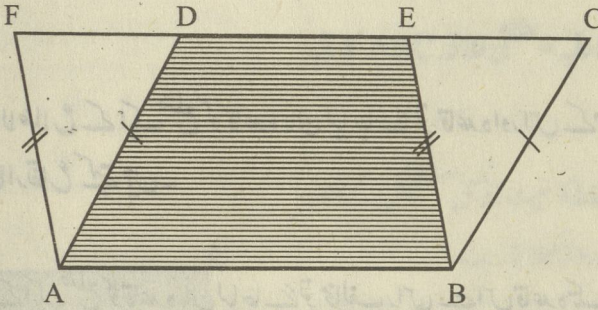
اسی طرح متوازی الاضلاع اشکال کے لیے بھی یہ نتیجہ ثابت کر سکتے ہیں۔

مفید نتیجہ

کسی متوازی الاضلاع کا وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے (ض۔ض۔ض) لہذا وہ دونوں مثلثیں رقبہ میں برابر ہوں گی۔

مسئلہ 16.1.1

ایک ہی قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

معلوم دو متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور ABEF کا مشترک قاعدہ $\overline{AB}$ ہے اور وہ دو متوازی قطعات خط $\overline{AB}$ اور $\overline{DE}$ کے درمیان واقع ہیں۔

مطلوب متوازی الاضلاع ABEF کا رقبہ = متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ

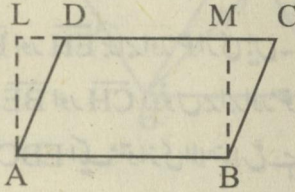
بیانات	دلائل
متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ = مثلث CBE کا رقبہ + چوکور ABED کا رقبہ .... (1)	رقبہ کا جمعی اصول متعارفہ
متوازی الاضلاع ABEF کا رقبہ = مثلث DAF کا رقبہ + چوکور ABED کا رقبہ .... (2)	رقبوں کا جمعی اصول متعارفہ
$\Delta CBE \longleftrightarrow \Delta DAF$ میں	
$m\overline{CB} = m\overline{DA}$	متوازی الاضلاع کے بالمقابل اضلاع
$m\overline{BE} = m\overline{AF}$	متوازی الاضلاع کے بالمقابل اضلاع
$\angle CBE = \angle DAF$	$\overline{BE} \parallel \overline{AF}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
$\therefore \quad \Delta CBE \cong \Delta DAF$	ض۔ز۔ض موضوعہ
$\therefore \quad \Delta CBE = \Delta DAF$ .... (3)	متماثل رقبوں کا اصول متعارفہ
لہٰذا متوازی الاضلاع ABEF کا رقبہ = متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ	(1)، (2) اور (3) کی رو سے

نتائج صریح

(i) اگر کسی متوازی الاضلاع اور مستطیل کے قاعدے مشترک اور ارتفاع برابر ہوں تو وہ رقبے میں بھی برابر ہوں گی۔

(ii) لہٰذا

متوازی الاضلاع کا رقبہ = قاعدہ کی لمبائی × ارتفاع

ثبوت

فرض کریں ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس کے قاعدہ $\overline{AB}$ کی مطابقت میں $\overline{AL}$ اس کا ارتفاع ہے۔

(i) چونکہ متوازی الاضلاع ABCD اور مستطیل ALMB ایک ہی قاعدہ $\overline{AB}$ پر اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔

اس لیے

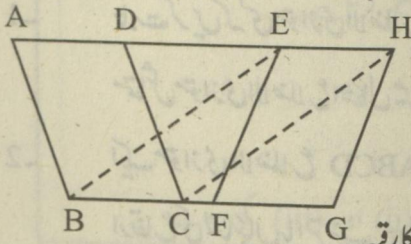
متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ = مستطیل ALMB کا رقبہ

(ii) لیکن مستطیل ALMB کا رقبہ = $\overline{AL} \times \overline{AB}$

لہٰذا متوازی الاضلاع کا رقبہ = $\overline{AL} \times \overline{AB}$

= قاعدہ کی لمبائی × ارتفاع

مسئلہ 16.1.2

برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں

معلوم متوازی الاضلاع اشکال EFGH, ABCD بالترتیب برابر قاعدوں $\overline{BC}$ اور $\overline{FG}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع بھی برابر ہیں۔

مطلوب متوازی الاضلاع EFGH کا رقبہ = متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ

عمل معلوم متوازی الاضلاع اشکال ABCD اور EFGH کو اس طرح سیٹ کریں (رکھیں) کہ ان کے برابر قاعدے $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ خط BCFG کے ہم خط ہو جائیں۔ B کو E اور C کو H سے ملائیں۔

ثبوت

دلائل	بیانات
ان کے ارتفاع برابر ہیں (معلوم)	دی گئی متوازی الاضلاع اشکال دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔ لہٰذا ADEH ایک خط مستقیم ہے اور $\overline{BC}$ کے متوازی ہے۔
معلوم EFGH ایک متوازی الاضلاع ہے۔	$\therefore \quad m\overline{BC} = m\overline{FG}$ $= m\overline{EH}$ اب $\overline{BC}$ اور $\overline{EH}$ برابر اور متوازی ہیں۔ اس لیے $\overline{BE}$ اور $\overline{CH}$ دونوں برابر اور متوازی ہیں۔
کسی چوکور کے دو ضلعے متوازی اور برابر ہوں تو وہ متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔	لہٰذا EBCH ایک متوازی الاضلاع ہے۔ اب
ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔	(i) ... متوازی الاضلاع EBCH = متوازی الاضلاع ABCD لیکن
ایک ہی قاعدہ $\overline{EH}$ پر دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔	(ii) ... متوازی الاضلاع EFGH = متوازی الاضلاع EBCH لہٰذا
(i) اور (ii) کی رو سے	متوازی الاضلاع EFGH کا رقبہ = متوازی الاضلاع ABCD کا رقبہ

مشق 16.1

1۔ ثابت کریں کہ کسی متوازی الاضلاع کے آمنے سامنے کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والا قطعہ خط اسے دو متماثل متوازی الاضلاع اشکال میں تقسیم کرتا ہے۔

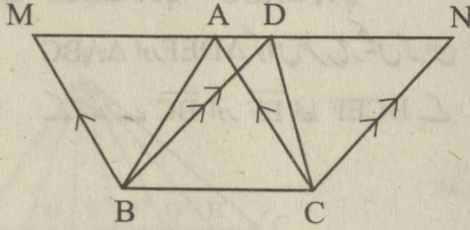
2۔ ایک متوازی الاضلاع ABCD میں $m\overline{AB}=10$ cm ہے۔ اضلاع $\overline{AB}$ اور $\overline{AD}$ کی مطابقت میں ارتفاع کی لمبائیاں بالترتیب 7cm اور 8cm ہیں۔ $\overline{AD}$ کی مقدار معلوم کریں۔

3۔ اگر برابر رقبے والی دو متوازی الاضلاع اشکال کے قاعدے برابر ہوں تو ثابت کریں کہ ان کے ارتفاع برابر ہوں گے۔

مسئلہ 16.1.3

ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

معلوم مثلثان ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع برابر ہیں۔

مطلوب ΔDBC کا رقبہ = ΔABC کا رقبہ

عمل $\overline{CN} \parallel \overline{BD}$ اور $\overline{BM} \parallel \overline{CA}$ کھینچیں جو $\overline{AD}$ (دونوں طرف بڑھانے سے) کو نقاط M اور N پر ملتے ہیں۔

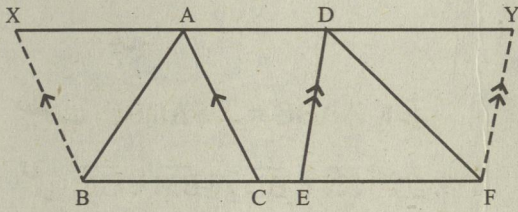
ثبوت

بیانات	دلائل
ΔABC اور ΔDBC دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں	ان کے ارتفاع برابر ہیں۔
لہٰذا $\overline{MADN} \parallel \overline{BC}$	
$\therefore$ متوازی الاضلاع BCAM کا رقبہ = متوازی الاضلاع BCND کا رقبہ .... (i)	یہ متوازی الاضلاع اشکال ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔
لیکن $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع BCAM کا رقبہ) کا رقبہ .... (ii)	متوازی الاضلاع کا ہر وتر اسے دو متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔
اور $\Delta DBC = \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع BCND کا رقبہ) کا رقبہ .... (iii)	
لہٰذا ΔDBC کا رقبہ = ΔABC کا رقبہ	(i), (ii) اور (iii) کی رو سے

مسئلہ 16.1.4

ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی

معلوم ΔABC اور ΔDEF برابر قاعدوں $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ پر واقع ہیں اور ان کے ارتفاع بھی برابر ہیں۔

مطلوب ΔDEF کا رقبہ = ΔABC کا رقبہ

عمل ΔABC اور ΔDEF کو اس طرح رکھیں کہ ان کے قاعدے $\overline{BC}$ اور $\overline{EF}$ خط $BCEF$ کے ہم خط ہوں اور ان کے راس اس خط کے ایک ہی طرف واقع ہوں۔ $\overline{BX} \parallel \overline{CA}$ اور $\overline{FY} \parallel \overline{ED}$ کھینچیں جو AD کو دونوں طرف بڑھانے سے بالترتیب نقاط X اور Y پر ملیں۔

ثبوت

بیانات	دلائل
ΔABC اور ΔDEF دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں	ان کے ارتفاع برابر ہیں (معلوم)
$\therefore$ $XADY \parallel BCEF$	
$\therefore$ متوازی الاضلاع $EFYD$ کا رقبہ = متوازی الاضلاع $BCAX$ کا رقبہ .... (i)	یہ متوازی الاضلاع اشکال برابر قاعدوں پر اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہیں۔
لیکن	
ΔABC کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع $BCAX$ کا رقبہ) .... (ii)	
اور	
ΔDEF کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ (متوازی الاضلاع $EFYD$ کا رقبہ) .... (iii)	
$\therefore$ ΔDEF کا رقبہ = ΔABC کا رقبہ	نتائج (i), (ii) اور (iii) کی رو سے

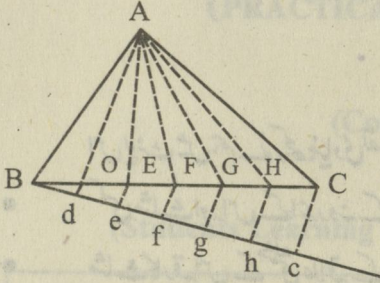
نتائج صریح:

(i) ایسی مثلثیں جن کے قاعدے برابر ہوں اور دو متوازی خطوط کے درمیان واقع ہوں وہ رقبے میں برابر ہوتی ہیں۔

(ii) مشترک راس والی ایسی مثلثیں جن کے قاعدے برابر اور ہم خط ہوں وہ رقبے میں برابر ہوتی ہیں۔

مشق 16.2

1۔ ثابت کریں کہ مثلث کا ہر ایک وسطانیہ اسے برابر رقبے والی دو مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔

2۔ ثابت کریں کہ متوازی الاضلاع کے وتر اسے ایسی چار مثلثوں میں تقسیم کرتے ہیں جو رقبے میں برابر ہوتی ہیں۔

3۔ ایک دی گئی مثلث کو چھ برابر مثلثی حصوں میں تقسیم کریں۔

اعادہ مشق 16

1۔ مندرجہ ذیل بیانات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔

(i) کسی بند شکل کی حد بندی کرنے والے قطعات خط جس علاقے کا احاطہ کرتے ہیں وہ شکل کا رقبہ کہلاتا ہے۔ ....

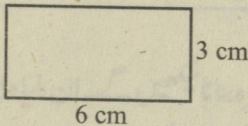
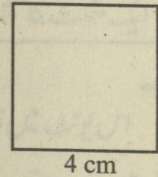
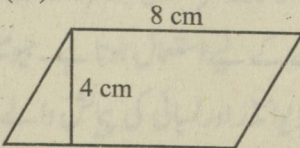
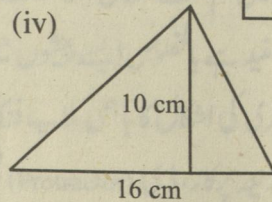
(ii) متشابہ اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔ ....

(iii) متماثل اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔ ....

(iv) کسی متوازی الاضلاع کا وتر اسے دو غیر متماثل مثلثوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ....

(v) کسی مثلث کا ارتفاع، اس کے راس سے متقابلہ ضلع (قاعدہ) تک عمودی فاصلہ ہوتا ہے۔ ....

(vi) کسی متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ اور ارتفاع کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔ ....

2۔ مندرجہ ذیل اشکال کا رقبہ معلوم کریں۔

3۔ مندرجہ ذیل اصطلاحات کی تعریف کریں۔

(i) دی گئی شکل کا رقبہ (ii) مثلثی رقبہ

(iii) مستطیلی رقبہ (iv) مثلث کا ارتفاع

خلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے کچھ بنیادی تصورات کا تذکرہ کیا۔ اور درج ذیل مسئلے بمع نتائج صرتح بیان اور ثابت کیے۔

- کسی مثلث اور اس کے اندرونہ کے یونین (Union) کو مثلثی علاقہ کہتے ہیں۔
- مثلث کا رقبہ اس کے مثلثی علاقہ کے رقبہ کو ہی کہتے ہیں۔
- کسی مثلث کا ارتفاع، اس کے راس کے بالمقابل ضلع تک عمودی فاصلہ ہوتا ہے۔

☆ ایک ہی قاعدہ پر واقع متوازی الاضلاع اشکال جو قاعدہ خط اور اس کے متوازی کسی خط کے درمیان واقع ہوں (یا ان کے ارتفاع برابر ہوں) وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ برابر قاعدوں پر واقع اور برابر ارتفاع والی متوازی الاضلاع اشکال رقبہ میں برابر ہوتی ہیں۔

☆ ایسی مثلثیں جو ایک ہی قاعدہ پر واقع ہوں اور ان کے ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ ایسی مثلثیں جن کے قاعدے اور ارتفاع برابر ہوں وہ رقبہ میں برابر ہوں گی۔

☆ کسی بند شکل کی حد بندی کرنے والے قطعات خط جس علاقے کا احاطہ کرتے ہیں وہ شکل کا رقبہ کہلاتا ہے۔

یونٹ 17

عملی جیومیٹری۔ مثلثیں

(PRACTICAL GEOMETRY - TRIANGLES)

یونٹ میں مطالعہ کی اہم حدود (Unit Outlines)

17.1 مثلثوں کی بناوٹ/ساخت (Construction of Triangles)

17.2 برابر رقبے والی اشکال (Figures with Equal Areas)

یونٹ میں طلبا کے لیے سیکھنے کے اہم وسیع تر ما حصل/نتائج (Students Learning Outcomes)

اس یونٹ کا مطالعہ کر کے نفس مضمون کو سیکھنے کا عمل اس وقت مکمل سمجھا جائے گا جب طلبا درج ذیل تصورات پر عملی دسترس حاصل کر کے اس قابل ہو جائیں گے کہ

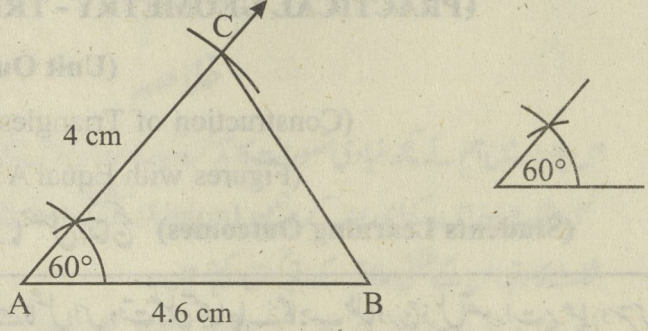
- ☆ ایک مثلث بنا سکیں جس کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔
- ☆ ایک مثلث بنا سکیں جس کا ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔
- ☆ ایک مثلث بنا سکیں جس کے دو اضلاع اور ان میں سے ایک ضلع کے متقابلہ زاویہ معلوم ہوں۔ (تینوں ممکن صورتیں)
- ☆ ایک معلوم مثلث کے زاویوں کے ناصف، عمود، اضلاع کے عمودی ناصف اور وسطانیے کھینچنا اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کر سکیں۔
- ☆ ایک مثلث بنا سکیں جس کا رقبہ ایک معلوم چوکور کے رقبہ کے برابر ہو۔
- ☆ ایک مستطیل بنا سکیں جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔
- ☆ ایک مربع بنا سکیں جس کا رقبہ ایک معلوم مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو۔
- ☆ ایک مثلث بنا سکیں جس کے قاعدہ کی مقدار معلوم ہو اور جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔

تعارف

اس یونٹ میں ہم مختلف اشکال مثلاً مثلث، مستطیل، مربع وغیرہ بنانا سیکھیں گے۔ ان بنیادی بناوٹوں کا علم روزمرّہ کی زندگی میں بہت مفید ہے بالخصوص ایسے پیشوں میں جن کا تعلق لکڑی کے کام، گرافک ہُنر مندی اور دھات کے کاروبار وغیرہ سے ہو۔ جیومیٹری کی اشکال کا باہمی ملاپ فنکارانہ خوب صورتی پیش کرنے کے لیے استعمال ہوتا ہے۔ جیومیٹریکل اشکال عام طور پر بذریعہ پرکار، ڈی (Protractor) یعنی زاویہ پیما، سیٹ سکوائر، ڈیوائڈر اور لمبائی کی پیمائش والے پیمانے (ruler) سے بنائی جاتی ہیں۔

مشاہدہ کریں کہ اگر قطعات خط معمول سے زیادہ لمبے یا چھوٹے ہوں تو شکل کی بناوٹ کے لیے مناسب سکیل کا انتخاب کیا جا سکتا ہے۔

17.1 مثلثوں کی بناوٹ / ساخت

(a) ایک مثلث بنائیں جس کے دو اضلاع کی لمبائیاں اور ان کے درمیانی زاویہ کی مقدار معلوم ہوں۔

معلوم فرض کریں ایک مثلث کے دو اضلاع $m\overline{AB} = 4.6\text{ cm}$ اور $m\overline{AC} = 4\text{ cm}$ اور ان کا درمیانی زاویہ یعنی $m\angle A = 60°$ دیئے گئے ہیں۔

مطلوب معلوم اضلاع اور ان کے درمیانی زاویہ یعنی $m\angle A = 60°$ کو استعمال کرتے ہوئے ΔABC بنانا

عمل

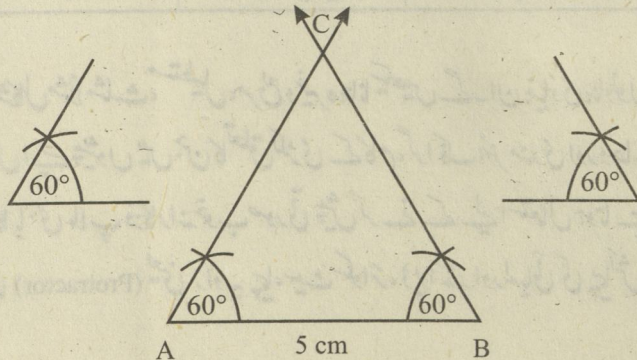
(i) $m\overline{AB} = 4.6\text{ cm}$ لمبا کھینچیں۔

(ii) $\overline{AB}$ کے سرے A پر $m\angle BAC = 60°$ بنائیں۔

(iii) $60°$ کے اختتامی بازو پر $m\overline{AC} = 4\text{ cm}$ لمبا قطع کریں۔

(iv) B کو C سے ملائیں۔

(v) لہٰذا ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

(b) ایک مثلث بنائیں جس کا ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔

معلوم

فرض کریں ایک ضلع جس کی لمبائی $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$ اور دو زاویے $m\angle A = 60^\circ$ اور $m\angle B = 60^\circ$ دیے گئے ہیں۔

مطلوب

دئی گئی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ΔABC بنانا۔

عمل

(i) قطعہ خط AB کھینچیں جبکہ $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$

(ii) $\overline{AB}$ کے نقطہ A کو راس مان کر $m\angle BAC = 60^\circ$ بنائیں

(iii) $\overline{BA}$ کے نقطہ B پر $m\angle ABC = 60^\circ$ بنائیں۔

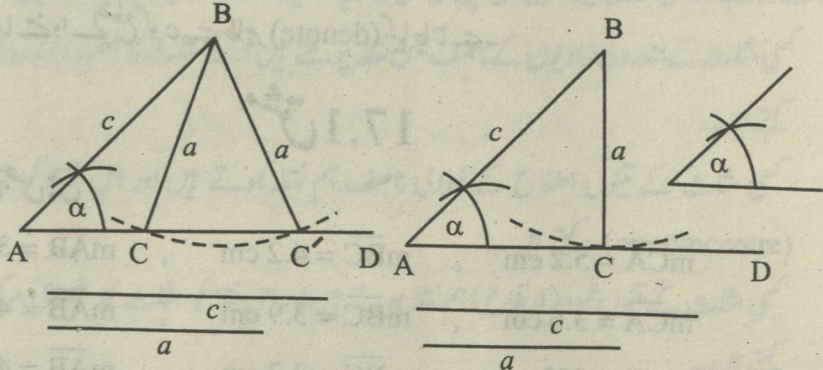
(iv) ان دونوں زاویوں کے غیر مشترک باز و نقطہ C پر ملتے ہیں۔

(v) ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

مشاہدہ کریں

جب کسی مثلث کے دو زاویے معلوم ہوں تو تیسرا زاویہ اس حقیقت سے معلوم کیا جا سکتا ہے کہ مثلث کے تینوں اندرونی زاویوں کا مجموعہ 180° ہوتا ہے۔ اس طرح اگر مثلث کے دو زاویے دیئے گئے ہوں تو تیسرا زاویہ معلوم ہو جاتا ہے۔ اور یوں دیئے گئے ضلع کو مثلث کا قاعدہ مان کر ان تینوں زاویوں میں سے کوئی سے دو زاویوں کو قاعدہ کے زاویے لیا جاسکتا ہے۔

(c) مبہم صورت (Ambiguous Case)

ایک مثلث بنائیں جبکہ اس کے دو اضلاع کی مقداریں اور ایک ضلع کے بالمقابل زاویہ کی مقدار معلوم ہو۔

شکل (a) شکل (b)

معلوم دو اضلاع کی لمبائیاں a ، c اور ان دونوں میں سے ایک ضلع a کے سامنے $m\angle A = \alpha$

مطلوب معلوم اجزاء سے مثلث بنانا۔

عمل (i) کسی مناسب لمبائی کا ایک قطعہ خط AD کھینچیں۔

(ii) نقطہ A کو راس مان کر $m\angle DAB = m\angle A = \alpha$ بنائیں۔

(iii) $m\overline{AB} = c$ قطع کریں۔

(iv) نقطہ B کو مرکز مان کر a کے برابر رداس کی ایک قوس لگائیں۔ اس طرح تین صورتیں سامنے آتی ہیں۔

صورت I

جب رداس a والی قوس، $\overline{AD}$ کو دو مختلف نقاط C اور C′ پر قطع کرتی ہے جیسا کہ شکل (a) میں۔

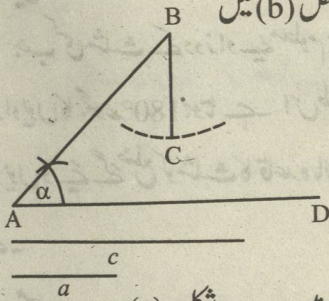
B کو C سے اور پھر C′ سے ملائیں۔

لہٰذا دی گئی معلومات سے دو مثلثیں ABC اور ABC′ بنیں گی اور یہی مطلوبہ مثلثان ہیں۔

صورت II

جب رداس a والی قوس، $\overline{AD}$ کو ایک ہی نقطہ C پر مس کرتی ہے جیسا کہ شکل (b) میں

نقطہ B کو نقطہ C سے ملائیں۔

لہٰذا ΔABC مطلوبہ مثلث ہے اور C پر قائمۃ الزاویہ ہے۔

صورت III

جب رداس a والی قوس، AD کو نہ تو قطع کرتی ہے اور نہ ہی مس کرتی ہے۔ اس صورت میں کوئی مثلث نہیں بنے گی۔ جیسا کہ شکل (c) میں

B
C
α
A
D
c
a

شکل (c)

نوٹ: یاد رکھیں کہ ایک مثلث ABC میں A∠ کے سامنے والے ضلع کو a سے، B∠ کے سامنے والے ضلع کو b سے اور C∠ کے سامنے والے ضلع کو c سے ظاہر (denote) کیا جاتا ہے۔

مشق 17.1

1۔ ΔABC بنائیں جس میں

(i) $m\overline{AB} = 3.2$ cm ، $m\overline{BC} = 4.2$ cm ، $m\overline{CA} = 5.2$ cm

(ii) $m\overline{AB} = 4.2$ cm ، $m\overline{BC} = 3.9$ cm ، $m\overline{CA} = 3.6$ cm

(iii) $m\overline{AB} = 4.8$ cm ، $m\overline{BC} = 3.7$ cm ، $m\angle B = 60°$

(iv) $m\overline{AB} = 3$ cm ، $m\overline{AC} = 3.2$ cm ، $m\angle A = 45°$

(v) $m\angle C = 70^\circ$ ، $m\overline{CA} = 3.5\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 4.2\text{ cm}$

(vi) $m\angle B = 105^\circ$ ، $m\angle A = 30^\circ$ ، $m\overline{AB} = 2.5\text{ cm}$

(vii) $m\angle B = 45^\circ$ ، $m\angle A = 75^\circ$ ، $m\overline{AB} = 3.6\text{ cm}$

2۔ ΔXYZ بنائیں جس میں

(i) $m\overline{YZ} = 7.6\text{ cm}$ ، $m\overline{XY} = 6.1\text{ cm}$ اور $m\angle X = 90^\circ$

(ii) $m\overline{ZX} = 6.4\text{ cm}$ ، $m\overline{YZ} = 2.4\text{ cm}$ اور $m\angle Y = 90^\circ$

(iii) $m\overline{XY} = 5.5\text{ cm}$ ، $m\overline{ZX} = 4.5\text{ cm}$ اور $m\angle Z = 90^\circ$

3۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیں جس کے وتر کی لمبائی 5 cm اور ایک ضلع 3.2 cm ہے (اشارہ: نصف دائرہ کے اندر کا زاویہ/محصور زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔)

4۔ ایک قائمۃ الزاویہ مساوی الساقین مثلث بنائیں جس کے وتر کی لمبائی مندرجہ ذیل ہے۔

(i) 5.2 cm (ii) 4.8 cm (iii) 6.2 cm (iv) 5.4 cm

(اشارہ: اگر ایک نقطہ کسی قطعہ خط کے عمودی ناصف پر واقع ہو تو وہ نقطہ قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہوگا)۔

5۔ (مبہم صورت) ایک مثلث بنائیں جس میں

(i) $m\overline{AC} = 4.2\text{ cm}$, ، $m\overline{AB} = 5.2\text{ cm}$ اور $m\angle B = 45^\circ$ (دو مثلثیں)

(ii) $m\overline{BC} = 2.5\text{ cm}$, ، $m\overline{AB} = 5\text{ cm}$ اور $m\angle A = 30^\circ$ (ایک مثلث)

(iii) $m\overline{BC} = 5\text{ cm}$, ، $m\overline{AC} = 3.5\text{ cm}$ اور $m\angle B = 60^\circ$

تعریفیں

اگر تین یا تین سے زیادہ خطوط ایک ہی نقطہ میں سے گذریں تو ان کو ہم نقطہ خطوط کہتے ہیں۔ یہ نقطہ تینوں خطوط کا مشترکہ نقطہ ہوتا ہے اور اس نقطہ کی جیومیٹری میں اپنی ہی اہمیت ہے۔ ایسے نقاط کو مخصوص نام دیے گئے ہیں۔

(i) کسی مثلث کے اندرونی زاویوں کے ناصف جس نقطہ پر ملتے ہیں اسے مثلث کا محصور/ اندرونی مرکز (incentre) کہتے ہیں۔

(ii) کسی مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں اور اس نقطہ کو مثلث کا محاصرہ مرکز (circumcentre) کہتے ہیں۔

(iii) کسی مثلث کے تینوں عمود (ارتفاع) ہم نقطہ ہوتے ہیں اور اس نقطہ کو مثلث کا عمودی مرکز (orthocentre) کہتے ہیں۔

(iv) کسی مثلث کے تینوں وسطانیے ہم نقطہ ہوتے ہیں اور اس نقطہ کو مثلث کا مرکز نما (centroid) کہتے ہیں۔

17.1.1 مثلث کے زاویوں کے ناصف، عمود (ارتفاع) وغیرہ کھینچنا۔

(a) ایک معلوم مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچیں اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کریں۔

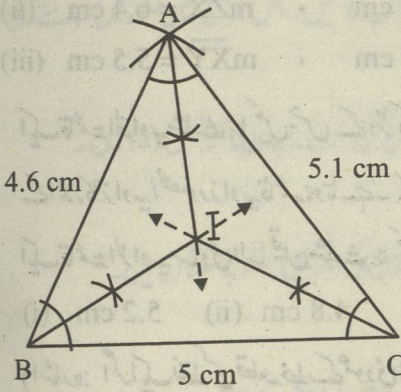
مثال

(i) ΔABC بنائیں جس میں

$m\overline{BC} = 5\text{ cm}$ ، $m\overline{AB} = 4.6\text{ cm}$

اور $m\overline{CA} = 5.1\text{ cm}$

(ii) اس مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچیں اور تصدیق کریں کہ یہ ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

A
4.6 cm
5.1 cm
I
B
5 cm
C

معلوم

ایک مثلث جس کے اضلاع

$m\overline{AB} = 4.6\text{ cm}$ ، $m\overline{BC} = 5\text{ cm}$

اور $m\overline{CA} = 5.1\text{ cm}$ ہیں۔

مطلوب

(i) ΔABC بنانا

(ii) اس مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچنا اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کرنا۔

عمل

(i) $\overline{BC}$ 5 سم لمبا کھینچیں

(ii) نقطہ B کو مرکز مان کر $m\overline{AB} = 4.6\text{ cm}$ رداس کی ایک قوس لگائیں۔

(iii) نقطہ C کو مرکز مان کر $m\overline{CA} = 5.1\text{ cm}$ رداس کی ایک اور قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ A پر قطع کرتی ہے۔

(iv) ΔABC کو مکمل کرنے کے لیے نقاط B اور C کو نقطہ A سے ملائیں۔

(v) زاویہ B اور زاویہ C کی ناصف شعاعیں کھینچیں جو نقطہ I پر باہم ملتی ہیں۔

(vi) اب تیسرے زاویہ A کی ناصف شعاع کھینچیں۔

(vii) ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ تیسرے زاویہ کی ناصف شعاع بھی نقطہ تقاطع I میں سے گزرتی ہے۔

(viii) پس مثلث ABC کے زاویوں کی ناصف شعاعیں I پر ہم نقطہ ہیں جو کہ مثلث کے اندر واقع ہے۔

> یاد رکھیں مثلث کے زاویوں کے ناصف جس نقطہ پر ملتے ہیں اسے مثلث کا اندرونی مرکز (incentre) کہتے ہیں۔

(b) ایک معلوم مثلث کے عمود (ارتفاع) کھینچیں اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کریں۔

مثال (i) ایک ΔABC بنائیں جس میں

$m\angle B = 56^\circ$ ،$m\overline{BC} = 5.9\text{ cm}$

اور $m\angle C = 44^\circ$ ہوں (protractor یعنی زاویہ پیما استعمال کریں)

(ii) مثلث کے عمود کھینچیں اور تصدیق کریں کہ وہ ہم نقطہ ہیں۔

معلوم

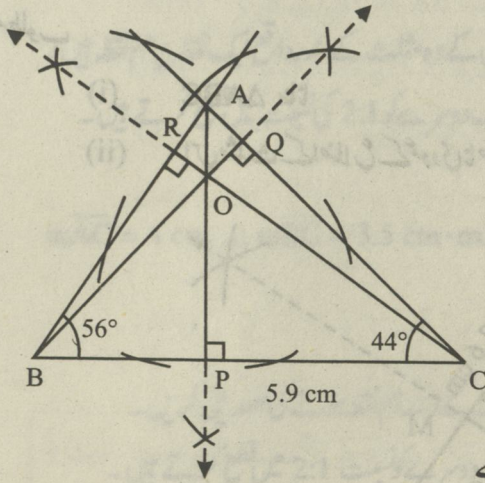
ضلع $m\overline{BC} = 5.9\text{ cm}$ اور زاویے

$m\angle C = 44^\circ$ ، $m\angle B = 56^\circ$

مطلوب

(i) ΔABC بنانا اور

(ii) اس کے عمود کھینچنا اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کرنا۔

عمل

(i) $m\overline{BC} = 5.9\text{ cm}$ لمبا کھینچیں

(ii) زاویہ پیما/ڈی (protractor) کی مدد سے

$m\angle BCA = 44^\circ$ اور $m\angle CBA = 56^\circ$

بناتے ہوئے ΔABC کی ساخت مکمل کریں۔

(iii) راس A سے $\overline{BC}$ پر عمود $\overline{AP}$ گرائیں

(iv) راس B سے $\overline{CA}$ پر عمود $\overline{BQ}$ گرائیں۔ یہ دونوں عمود ΔABC کے اندر نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

(v) اب تیسرے راس C سے $\overline{AB}$ پر عمود $\overline{CR}$ گرائیں۔

(vi) ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہ تیسرا عمود بھی پہلے دو عمودوں کے نقطہ تقاطع O میں سے گزرتا ہے۔

(vii) لہٰذا ΔABC کے تینوں عمود O پر ہم نقطہ ہیں۔

نوٹ: یاد رکھیں کہ مثلث کے تینوں عمود جہاں ہم نقطہ ہوتے ہیں وہ نقطہ عمودی مرکز (orthocentre) کہلاتا ہے۔

(c) ایک معلوم مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف کھینچیں اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کریں۔

مثال

(i) ΔABC بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 4\ cm$ ، $m\overline{BC} = 4.8\ cm$ اور $m\overline{AC} = 3.6\ cm$

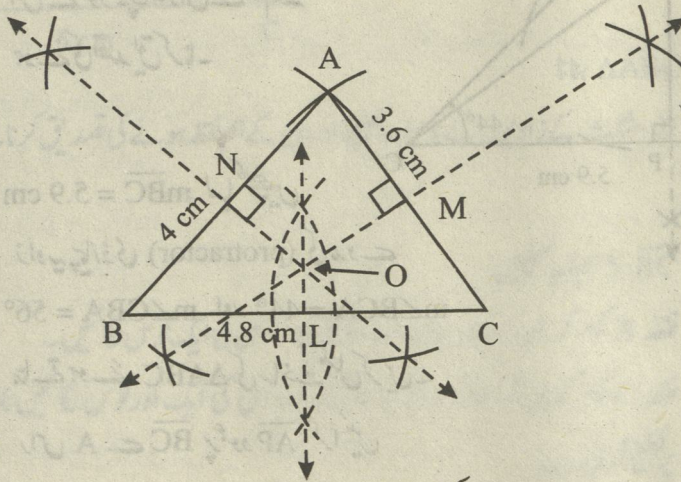
(ii) اس مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کھینچیں اور تصدیق کریں کہ یہ ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

معلوم

ΔABC کے تینوں اضلاع دیئے گئے ہیں $m\overline{AB} = 4\ cm$ ، $m\overline{BC} = 4.8\ cm$
اور $m\overline{AC} = 3.6\ cm$

مطلوب

(i) ΔABC بنانا

(ii) اس مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کھینچنا اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کرنا۔

عمل

(i) $m\overline{BC} = 4.8\ cm$ لمبا کھینچیں

(ii) B کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{BA} = 4\ cm$ لے کر ایک قوس لگائیں۔

(iii) C کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{CA} = 3.6\ cm$ لے کر ایک اور قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ A پر قطع کرتی ہے۔

(iv) ΔABC مکمل کرنے کے لیے B کو A سے اور C کو A سے ملائیں۔

(v) اضلاع $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف کھینچیں جو ایک دوسرے کو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں۔

(vi) اب تیسرے ضلع $\overline{AB}$ کا عمودی ناصف کھینچیں۔

(vii) ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہ بھی پہلے دو عمودی ناصفوں کے نقطہ تقاطع O میں سے گزرتا ہے۔

(viii) لہٰذا ΔABC کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف O پر ہم نقطہ ہیں۔

> **نوٹ:** یاد رکھیں کہ مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف جہاں ہم نقطہ ہوتے ہیں وہ نقطہ محاصرہ مرکز (circumcentre) کہلاتا ہے۔

(d) ایک دی ہوئی مثلث کے وسطانیے کھینچیں اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کریں۔

مثال

(i) ایک ΔABC بنائیں جس میں $m\overline{AB} = 4.8$ cm، $m\overline{BC} = 3.5$ cm اور $m\overline{AC} = 4$ cm

(ii) اس مثلث کے وسطانیے کھینچیں اور تصدیق کریں کے وہ مثلث کے اندر واقع ایک نقطہ پر ہم نقطہ ہیں۔

(iii) پیمائش سے ظاہر کریں کہ مثلث کے وسطانیے ایک دوسرے کو 2:1 کی نسبت میں قطع کرتے ہیں۔

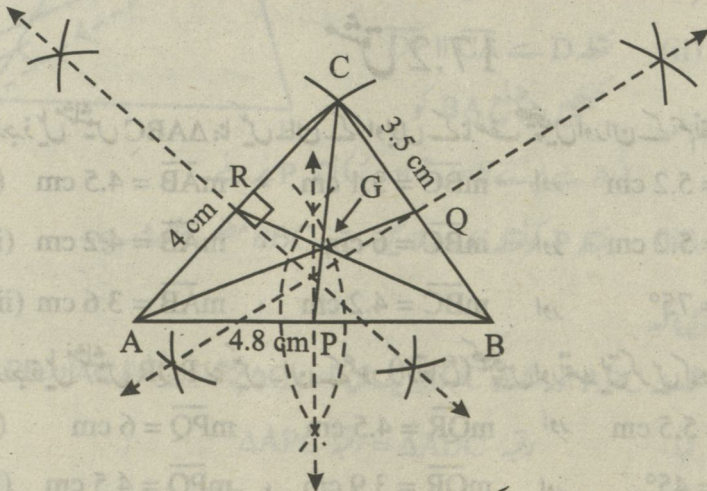
معلوم

ΔABC کے تینوں اضلاع $m\overline{AB} = 4.8$ cm، $m\overline{BC} = 3.5$ cm اور $m\overline{AC} = 4$ cm

مطلوب

(i) دی گئی معلومات سے ΔABC بنائیں

(ii) اس مثلث کے وسطانیے کھینچیں اور ان کے مثلث کے اندر ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کریں۔

(iii) پیمائش کر کے دیکھیں کہ مثلث کے وسطانیے ایک دوسرے کو نسبت 2:1 میں قطع کرتے ہیں۔

عمل

(i) $m\overline{AB} = 4.8$ cm لمبا کھینچیں

(ii) نقطہ A کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{AC} = 4$ cm کی ایک قوس لگائیں۔

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر اور رداس $m\overline{BC} = 3.5\ cm$ لے کر ایک اور قوس لگائیں جو پہلی قوس کو نقطہ C پر قطع کرتی ہے۔

(iv) A کو C سے اور B کو C سے ملا کر مثلث ABC کی ساخت مکمل کریں۔

(v) ΔABC کے اضلاع $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ کے عمودی ناصف کھینچیں اور ان اضلاع کے وسطی نقاط کو بالترتیب P ، Q اور R سے ظاہر کریں۔

(vi) نقطہ A کو وسطی نقطہ Q سے ملا کر وسطانیہ $\overline{AQ}$ بنائیں۔

(vii) نقطہ B کو وسطی نقطہ R سے ملا کر وسطانیہ $\overline{BR}$ حاصل کریں۔

(viii) وسطانیے $\overline{AQ}$ اور $\overline{BR}$ نقطہ G پر قطع کرتے ہیں۔

(ix) اب تیسرا وسطانیہ $\overline{CP}$ کھینچیں۔

(x) ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ تیسرا وسطانیہ بھی پہلے دو وسطانیوں کے نقطہ تقاطع G میں سے گزرتا ہے۔

(xi) لہٰذا ΔABC کے تینوں وسطانیے مثلث کے اندر واقع نقطہ G میں سے گزرتے ہیں۔ یعنی وہ G پر ہم نقطہ ہیں۔

(xii) پیمائش کر کے ہم دیکھتے ہیں کہ مثلث کے وسطانیے ایک دوسرے کو 2:1 کی نسبت میں قطع کرتے ہیں۔ جیسے $\overline{AG} : \overline{GQ} = 2:1$ وغیرہ

نوٹ: یاد رکھیں مثلث کے تینوں وسطانیے ہم نقطہ ہوتے ہیں اور اس نقطہ کو مثلث کا مرکز نما (centroid) کہتے ہیں۔

مشق 17.2

1۔ مندرجہ ذیل مثلثیں ΔABC بنائیں۔ ان کے زاویوں کے ناصف کھینچیں اور ان کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کریں۔

(i) $m\overline{AB} = 4.5\ cm$ ، $m\overline{BC} = 3.1\ cm$ اور $m\overline{CA} = 5.2\ cm$

(ii) $m\overline{AB} = 4.2\ cm$ ، $m\overline{BC} = 6\ cm$ اور $m\overline{CA} = 5.2\ cm$

(iii) $m\overline{AB} = 3.6\ cm$ ، $m\overline{BC} = 4.2\ cm$ اور $m\angle B = 75°$

2۔ مندرجہ ذیل مثلثیں PQR بنائیں۔ ان کے عمود (ارتفاع) کھینچیں اور تصدیق کریں کہ وہ ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

(i) $m\overline{PQ} = 6\ cm$ ، $m\overline{QR} = 4.5\ cm$ اور $m\overline{PR} = 5.5\ cm$

(ii) $m\overline{PQ} = 4.5\ cm$ ، $m\overline{QR} = 3.9\ cm$ اور $m\angle R = 45°$

(iii) $m\overline{RP} = 3.6\ cm$ ، $m\angle Q = 30°$ اور $m\angle P = 105°$

3۔ مندرجہ ذیل مثلثیں ABC بنائیں۔ ان کے اضلاع کے عمودی ناصف کھینچیں اور تصدیق کریں کہ وہ ہم نقطہ ہیں۔ کیا یہ مثلث کے اندر ہم نقطہ ہیں؟

(i) $m\overline{AB} = 5.3\ cm$ ، $m\angle A = 45^\circ$ اور $m\angle B = 30^\circ$

(ii) $m\overline{BC} = 2.9\ cm$ ، $m\angle A = 30^\circ$ اور $m\angle B = 60^\circ$

(iii) $m\overline{AB} = 2.4\ cm$ ، $m\overline{AC} = 3.2\ cm$ اور $m\angle A = 120^\circ$

4۔ مندرجہ ذیل مثلثیں XYZ بنائیں۔ ان کے وسطانیے کھینچیں اور تصدیق کریں کہ وہ ہم نقطہ ہیں۔

(i) $m\overline{YZ} = 4.1\ cm$ ، $m\angle Y = 60^\circ$ اور $m\angle X = 75^\circ$

(ii) $m\overline{XY} = 4.5\ cm$ ، $m\overline{YZ} = 3.4\ cm$ اور $m\overline{ZX} = 5.6\ cm$

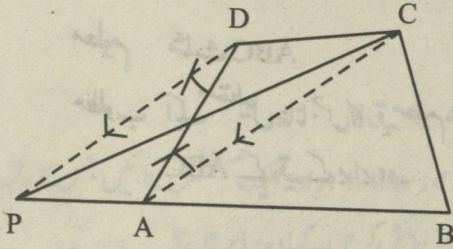
(iii) $m\overline{ZX} = 4.3\ cm$ ، $m\angle X = 75^\circ$ اور $m\angle Y = 45^\circ$

17.2 برابر رقبے والی اشکال

(i) ایک مثلث بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم چوکور کے رقبہ کے برابر ہو۔

معلوم ایک چوکور ABCD

مطلوب ایک مثلث بنانا جس کا رقبہ چوکور ABCD کے رقبہ کے برابر ہو۔

عمل

(i) A کو C سے ملائیں

(ii) نقطہ D سے $\overline{DP} \parallel \overline{CA}$ کھینچیں جو ضلع BA کو (A سے پرے بڑھاتے ہوئے) نقطہ P پر ملے۔

(iii) نقطہ P کو نقطہ C سے ملائیں۔ تب PBC مطلوبہ مثلث ہے۔

مشاہدہ کریں کہ

مثلث APC اور مثلث ADC ایک ہی قاعدہ AC پر متوازی خطوط AC اور PD کے درمیان واقع ہیں

لہٰذا رقبہ ΔADC = رقبہ ΔAPC

$$\Delta APC + \Delta ABC = \Delta ADC + \Delta ABC$$

یا رقبہ ΔPBC = چوکور $ABCD$

مشق 17.3

1۔ (i) ایک چوکور ABCD بنائیں جس میں $m\overline{AB} = m\overline{AC} = 5.3$ cm،
$m\overline{BC} = m\overline{CD} = 3.8$ cm اور $m\overline{AD} = 2.8$ cm

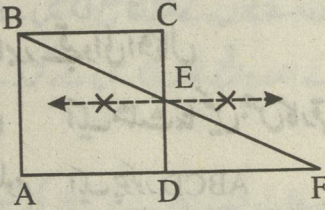
(ii) ضلع BC پر ایک مثلث بنائیں جس کا رقبہ چوکور ABCD کے رقبہ کے برابر ہو۔

2۔ ایک مثلث بنائیں جس کا رقبہ چوکور PQRS کے رقبہ کے برابر ہو جبکہ

$m\overline{QR} = 7$ cm، $m\overline{RS} = 6$ cm، $m\overline{SP} = 2.75$ cm، $m\angle QRS = 60°$

$m\angle RSP = 90°$ [اشارہ $2.75 = \frac{1}{2} \times 5.5$]

3۔ ایک مثلث بنائیں جس کا رقبہ چوکور ABCD کے رقبہ کے برابر ہو جبکہ

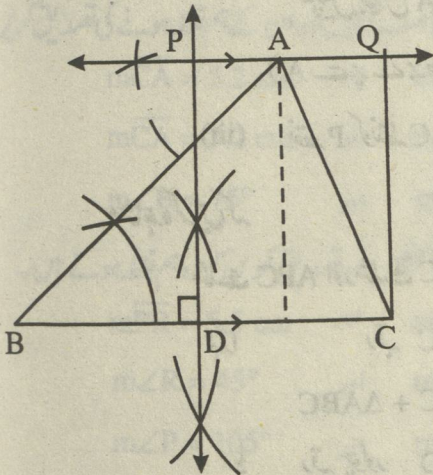
$m\overline{AB} = 6$ cm، $m\overline{BC} = 4$ cm، $m\overline{AC} = 7.2$ cm، $m\angle BAD = 105°$ اور

$m\overline{BD} = 8$ cm

4۔ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مربع کے رقبہ کے برابر ہو۔

(ii) ایک مستطیل بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔

معلوم مثلث ABC

مطلوب ایک مستطیل بنانا جس کا رقبہ معلوم مثلث ABC کے رقبہ کے برابر ہو۔

عمل

(i) ایک ΔABC لیں۔

(ii) ضلع $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف $\overleftrightarrow{DP}$ کھینچیں۔

(iii) ΔABC کے زاویہ A کے راس میں سے گزرتا ہوا $\overleftrightarrow{PAQ} \parallel \overline{BC}$ کھینچیں جو $\overleftrightarrow{DP}$ کو نقطہ P پر قطع کرتا ہے۔

(iv) $m\overline{PQ} = m\overline{DC}$ لیں۔

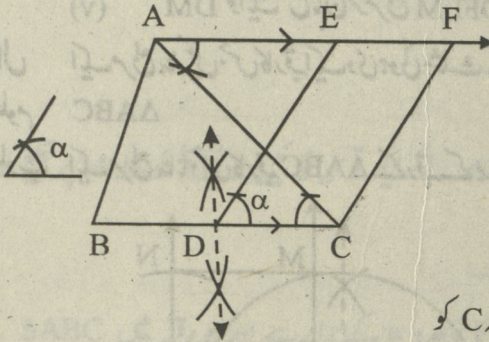
(v) نقطہ Q کو نقطہ C سے ملائیں۔

(vi) تب CDPQ مطلوبہ مستطیل ہے۔

مثال ایک متوازی الاضلاع بنائیں جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے برابر ہو اور ایک زاویہ دیئے گئے زاویہ کے برابر ہو۔

معلوم ΔABC اور $\angle\alpha$

مطلوب ایک متوازی الاضلاع بنانا جس کا رقبہ ΔABC کے رقبہ کے برابر ہو اور ایک زاویہ $= \angle\alpha$

عمل

(i) $\overline{BC}$ کی نقطہ D پر تنصیف کریں۔

(ii) $\overline{DE}$ اس طرح کھینچیں کہ $\angle CDE = \angle\alpha$

(iii) $\overrightarrow{AEF} \parallel \overline{BC}$ کھینچیں جو $\overline{DE}$ کو نقطہ E پر قطع کرے۔

(iv) $\overline{EF}$ برابر $\overline{DC}$ قطع کریں۔ نقطہ C کو نقطہ F سے ملائیں

تب CDEF مطلوبہ متوازی الاضلاع ہوگی۔

مشق 17.4

1۔ ایک مثلث بنائیں جس کے اضلاع کی لمبائی 4 cm ، 5 cm اور 6 cm ہو اور ایک مستطیل بنائیں جس کا رقبہ دی گئی مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔ مستطیل کے دونوں وتروں کی پیمائش کریں۔ کیا وہ برابر ہیں؟

2۔ ایک متساویُ السّاقین مثلث کو مستطیل میں تبدیل کریں۔

3۔ ایک ΔABC بنائیں جبکہ $m\overline{AB} = 3$ cm ، $m\overline{BC} = 3.8$ cm ، $m\overline{AC} = 4.8$ cm ہو۔ ایک مستطیل بنائیں جس کا رقبہ ΔABC کے رقبہ کے برابر ہو اور اس مستطیل کے اضلاع کی پیمائش کریں۔

(iii) ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ دی گئی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو۔

معلوم ایک مستطیل ABCD

مطلوب ایک مربع بنانا جس کا رقبہ مستطیل ABCD کے رقبہ کے برابر ہو۔

عمل (i) $\overline{AD}$ کو E تک اتنا بڑھائیں کہ
$m\overline{DE} = m\overline{CD}$

(ii) $\overline{AE}$ کی نقطہ O پر تنصیف کریں۔

(iii) نقطہ O کو مرکز مان کر اور $\overline{OA}$ کو رداس لے کر ایک نصف دائرہ کھینچیں۔

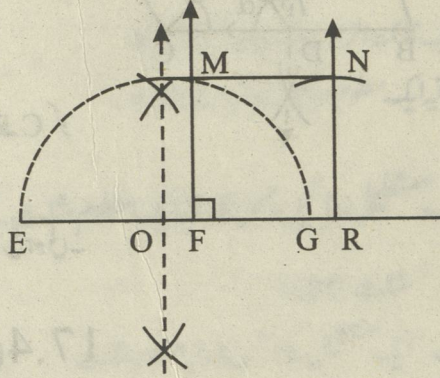
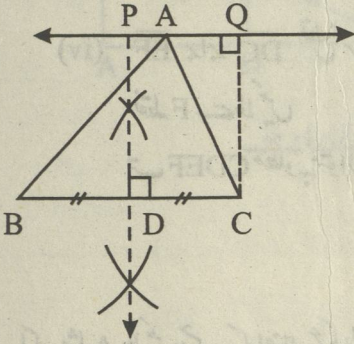
(iv) $\overline{CD}$ کو D سے پرے اتنا بڑھائیں کہ نصف دائرے کو نقطہ M پر ملے۔

(v) $\overline{DM}$ کو ایک ضلع مان کر مربع DFLM کی ساخت مکمل کریں۔ یہی مطلوبہ مربع ہوگا۔

مثال ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ ایک دی ہوئی مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔

معلوم ΔABC

مطلوب ایک مربع بنانا جس کا رقبہ ΔABC کے رقبہ کے برابر ہو۔

عمل (i) $\overleftrightarrow{PAQ} \parallel \overline{BC}$ کھینچیں۔

(ii) ضلع $\overline{BC}$ کی عمودی ناصف شعاع کھینچیں جو اس کی نقطہ D پر تنصیف کرتی ہے اور $\overleftrightarrow{PAQ}$ کو نقطہ P پر ملتی ہے۔

(iii) $\overline{PQ}$ پر عمود $\overline{CQ}$ گرائیں جو اسے نقطہ Q پر ملے۔

(iv) ایک خط EFG لیں اور اس پر $\overline{EF} = \overline{DP}$ اور $\overline{FG} = \overline{DC}$ قطع کریں۔

(v) $\overline{EG}$ کی نقطہ O پر تنصیف کریں۔

(vi) O کو مرکز مان کر اور رداس $\overline{OE}$ کے برابر لے کر ایک نصف دائرہ کھینچیں۔

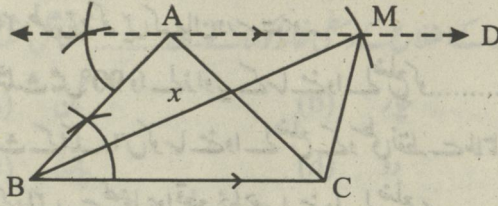
(vii) $\overline{EG}$ کے نقطہ F پر $\overline{FM}$ عمود کھینچیں جو نصف دائرہ کو نقطہ M پر ملے۔

(viii) $\overline{MF}$ کو ایک ضلع مان کر مربع FMNR مکمل کریں جو کہ مطلوبہ مربع ہے۔

(iv) ایک مثلث بنائیں جس کا قاعدہ معلوم ہو اور جس کا رقبہ معلوم مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔

معلوم ΔABC

مطلوب ایک مثلث بنانا جس کے قاعدہ کی لمبائی x ہو اور جس کا رقبہ ΔABC کے مساوی ہو۔

عمل

(i) دی ہوئی ΔABC بنائیں۔

(ii) $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overline{BC}$ کھینچیں

(iii) نقطہ B کو مرکز مان کر اور رداس x کے برابر لے کر ایک قوس لگائیں جو $\overleftrightarrow{AD}$ کو نقطہ M پر قطع کرتی ہے۔

(iv) B کو M سے اور C کو M سے ملائیں۔

(v) پس ΔBCM مطلوبہ مثلث ہے جس کا قاعدہ x کے برابر ہے اور جو رقبہ میں ΔABC کے مساوی ہے۔

مشق 17.5

1۔ ایک مستطیل بنائیں جس کے متصلہ اضلاع بالترتیب 2.5 cm اور 5 cm ہیں۔ ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ دی ہوئی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو۔

2۔ ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ ایک ایسی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو جس کے متصلہ اضلاع بالترتیب 4.5 cm اور 2.2 cm ہیں۔ مربع کے اضلاع کی پیمائش کریں اور اس کا رقبہ معلوم کریں۔ اس رقبہ کا موازنہ مستطیل کے رقبہ سے کریں۔

3۔ مندرجہ بالا سوال نمبر 2 میں پیمائش سے تصدیق کریں کہ مربعے کا احاطہ مستطیل کے احاطہ سے کم ہے۔

4۔ ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ دو مربعوں کے مجموعی رقبہ کے برابر ہو جبکہ ان دو مربعوں کے اضلاع بالترتیب 3cm اور 4cm ہوں۔

5۔ ایک مثلث بنائیں جس کا قاعدہ 3.5 cm اور دوسرے دو اضلاع بالترتیب 3.4 cm اور 3.8 cm ہیں۔ اس مثلث کو مساوی رقبہ والے مربع میں تبدیل کریں۔

6۔ ایک مثلث بنائیں جس کا قاعدہ 5 cm اور دوسرے اضلاع 5 cm اور 6 cm ہوں۔ ایک مربع بنائیں جس کا رقبہ دی گئی مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔

اعادہ مشق 17

1۔ مندرجہ ذیل خالی جگہوں کو اس طرح پُر کریں کہ بیان درست ہو۔

(i) قائمۃ الزاویہ مثلث میں 90° والے زاویہ کے سامنے والے ضلع کو......... کہتے ہیں۔

(ii) قطعہ خط جو مثلث کے ایک راس کو سامنے والے ضلع کے وسطی نقطہ سے ملاتا ہے......... کہلاتا ہے۔

(iii) ایک مثلث کے راس سے کھینچا ہوا قطعہ خط جو سامنے والے ضلع پر .... ہو اسے مثلث کا ارتفاع کہتے ہیں۔

(iv) ایک مثلث کے تین زاویوں کے ناصف........ ہوتے ہیں۔

(v) مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف جہاں ہم نقطہ ہوتے ہیں وہ نقطہ مثلث کے راسوں سے......... ہوتا ہے۔

(vi) دو یا دو سے زیادہ باہم مطابقت رکھنے والی مثلثیں متشابہ کہلاتی ہیں اگر ان کے متناظرہ (باہم مطابق) زاویے متماثل اور ان کے متناظرہ اضلاع........ ہوں۔

(vii) قائمۃ الزاویہ مثلث کے ارتفاع قائمہ زاویہ کے........ پر ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

2۔ کثیر الانتخابی سوالات۔ (d), (c), (b), (a) میں سے درست جواب کا انتخاب کر کے خالی جگہ پُر کریں۔

(i) ایک مثلث جس کے دو اضلاع متماثل ہوں......... کہلاتی ہے۔

(a) مختلف الاضلاع (b) قائمۃ الزاویہ
(c) مساوی الاضلاع (d) مُتساویُ الساقین

(ii) ایک چوکور جس کا ہر زاویہ 90° ہو .... کہلاتی ہے۔

(a) متوازی الاضلاع (b) مستطیل
(c) (trapezium) ذوزنقہ (d) (rhombus) مُعَیّن

(iii) مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف......... ہوتے ہیں۔

(a) متماثل (b) ہم خط
(c) ہم نقطہ (d) متوازی

(iv) مُتساویُ الساقین مثلث کے......... ارتفاع متماثل ہوتے ہیں۔

(a) دو (b) تین
(c) چار (d) کوئی بھی نہیں

(v) ایک نقطہ جو کسی قطعہ خط کے سروں سے مساوی الفاصلہ ہو وہ اس قطعہ خط کے......... پر واقع ہوتا ہے۔

(a) ناصف (b) عمودی ناصف
(c) عمود (d) وسطانیہ

(vi) ایک مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے سے......... متماثل مثلثان بنائی جاسکتی ہیں۔

(a) تین (b) چار
(c) پانچ (d) دو

(vii) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی......... کرتے ہیں۔

(a) تنصیف (b) تثلیث
(c) عمودی تنصیف (d) ان میں سے کوئی بھی نہیں

(viii) مثلث کے وسطانیے ایک دوسرے کو......... کی نسبت میں قطع کرتے ہیں۔

(a) 1 : 4 (b) 1 : 3
(c) 1 : 2 (d) 1 : 1

(ix) متساوی الساقین مثلث کے قاعدے پر ایک زاویہ 30° ہے۔اس کے راسی زاویے کی مقدار کیا ہے؟

(a) 30° (b) 60°
(c) 90° (d) 120°

(x) اگر ایک مثلث کے تینوں عمود متماثل ہیں تو وہ مثلث......... ہوگی۔

(a) مساوی الاضلاع (b) قائمۃ الزاویہ
(c) متساوی الساقین (d) حادۃ الزاویہ

(xi) اگر ایک مثلث کے دو وسطانیے متماثل ہوں تو وہ مثلث......... ہوگی

(a) متساوی الساقین (b) مساوی الاضلاع
(c) قائمۃ الزاویہ (d) حادۃ الزاویہ

3۔ مندرجہ ذیل کی تعریف کریں۔

(i) اندرونی مرکز (incentre) (ii) سرکم سنٹر (circumcentre)
(iii) عمودی مرکز/آرتھوسنٹر (orthocentre) (iv) سنٹرائڈ (centroid)
(iv) ہم نقطہ (point of concurrency)

خُلاصہ

اس یونٹ میں ہم نے مندرجہ ذیل اشکال کی بناوٹ (ساخت) اوران سے متعلقہ تصورات سیکھے۔

☆ ایک مثلث بنانا جس کے دو اضلاع اوران کا درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

☆ ایک مثلث بنانا جس کا ایک ضلع اور دو زاویے معلوم ہوں۔

☆ ایک مثلث بنانا جس کے دو اضلاع اوران میں سے ایک ضلع کے بالمقابل زاویہ معلوم ہوں۔

☆ ایک معلوم مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچنا اوران کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کرنا۔

☆ ایک معلوم مثلث کے عمود (ارتفاع) کھینچنا اوران کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کرنا۔

☆ ایک معلوم مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کھینچنا اوران کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کرنا۔

☆ ایک معلوم مثلث کے وسطانیے کھینچنا اوران کے ہم نقطہ ہونے کی تصدیق کرنا۔

☆ ایک مثلث بنانا جس کا رقبہ ایک معلوم چوکور کے رقبہ کے برابر ہو۔

☆ ایک مستطیل بنانا جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے برابر ہو۔

☆ ایک مربع بنانا جس کا رقبہ ایک معلوم مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو۔

☆ ایک مثلث بنانا جس کے قاعدہ کی مقدار معلوم ہو اور جس کا رقبہ ایک معلوم مثلث کے رقبہ کے مساوی ہو۔

☆ تین یا تین سے زیادہ خطوط ہم نقطہ کہلاتے ہیں اگر وہ ایک ہی نقطہ میں سے گذریں۔

- کسی مثلث کے اندرونی زاویوں کے ناصف جس نقطہ پر ملتے ہیں اسے مثلث کا محصور / اندرونی مرکز (incentre) کہتے ہیں۔
- ایک مثلث کے محاصرہ مرکز (circumcentre) سے مراد ایک ایسا نقطہ ہے جہاں مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔
- مثلث کا وسطانیہ (median) ایک ایسا قطعہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے ایک راس کو بالمقابل (سامنے والے) ضلع کے وسطی نقطہ سے ملائے۔
- مثلث کے عمودی مرکز یعنی آرتھوسنٹر (orthocentre) سے مراد ایک ایسا نقطہ ہے جہاں پر مثلث کے تینوں عمود (ارتفاع) ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

جوابات

مشق 1.1

1. A کا مرتبہ 2-by-2 ، B کا مرتبہ 2-by-2 ، C کا مرتبہ 1-by-2
   D کا مرتبہ 3-by-1 ، E کا مرتبہ 3-by-2 ، F کا مرتبہ 1-by-1
   G کا مرتبہ 3-by-3 ، H کا مرتبہ 2-by-3

2. A = C, B = I, E = H = J, F = G
3. $a = -4,\ b = -1.5,\ c = 4$ and $d = 3$

مشق 1.2

1. A صفری قالب　B قطاری قالب　C کالمی قالب
   D وحدانی (ضربی ذاتی) قالب　E صفری قالب　F کالمی قالب
2. (a) (iii) (iv) (viii)　(b) (i) (ii) (v) (vi) (vii) (ix)
   (c) (vi)　(d) (ii) (vii)　(e) (iv)　(f) (ix)
3. سکیلر قالب : A, E　وحدانی قالب : C　وتری قالب : A, B, C, D, E

4. $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

5. $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$, $C^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

   $D^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $E^t = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $F^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

مشق 1.3

1. A اور E, B اور D, C اور F.

2. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ (ix) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $\begin{bmatrix} 3 & -20 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 15 \\ -25 & -16 \end{bmatrix}$ 7. $a = \frac{13}{2}$, $b = \frac{2}{3}$

مشق 1.4

1. ممکن (i), (ii), (iv), (v) 2. (i) $AB = \begin{bmatrix} 18 \\ 4 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -12 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 24 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -12 & -15 \\ 24 & 34 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 5 & -1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 13 & 34 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

مشق 1.5

1. (i) -2 (ii) -8 (iii) 0 (iv) 10
2. (i) نادر (ii) غیرنادر (iii) غیرنادر (iv) نادر
3. (i) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ (ii) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) ممکن نہیں C^{-1} (iv) $D^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

5. (i) ضربی معکوس (ii) ضربی معکوس

مشق 1.6

1. (i) $x = 2, y = 0$ (ii) $x = \frac{7}{2}, y = -4$ (iii) $x = \frac{3}{5}, y = \frac{14}{5}$ (iv) $x = -2, y = 0$

(v) حل ممکن نہیں (vi) $x = 4, y = -7$ (vii) $x = 2, y = 0$ (viii) $x = 4, y = 2.$

2. 15, 60 3. 18.5 cm, 15 cm 4. 49°, 49°, 82° 5. 26°, 64°

6. 50 km/h, 56 km/h

اعادہ مشق 1

1. (i) b (ii) c (iii) a (iv) b (v) a (vi) c (vii) a (viii) d

2. (i) صفری (ii) وحدانی (ضربی ذاتی) (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) کے برابر نہیں ہے (v) برابر (vi) مربعی

3. $a = -6, b = 3$.

4. (i) $\begin{bmatrix} 19 & -6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 4 & -17 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -36 & 15 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} -\frac{22}{3} & 12 \\ \frac{16}{3} & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

مشق 2.1

1. ناطق اعداد : (ii), (iv), (v) غیر ناطق اعداد : (i), (iii), (vi)

2. (i) 0.68 (ii) 4.75 (iii) 7.125
(iv) 11.3889 (v) 0.625 (vi) 0.65789

3. (i) غلط (ii) درست (iii) غلط (iv) درست (v) غلط

4. (i) 2/3 ; −3 −2 −1 0 P 1 2 3 4
(ii) P(−4/5) ; −3 −2 −1 0 1 2 3 4
(iii) $1\frac{3}{4}$; −4 −3 −2 −1 0 1 P 2 3 4
(iv) $-2\frac{5}{8}$; −4 −3 P −2 −1 0 1 2 3 4
(v) $2\frac{3}{4}$; −4 −3 −2 −1 0 1 2 P 3 4
(vi) $\sqrt{5}$; −4 −3 −2 −1 0 1 2 P 3 4

5. $\frac{47}{72}$ 6. (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{13}{99}$ (iii) $\frac{67}{99}$

مشق 2.2

1. (i) خاصیت مبادلہ بالحاظ جمع (ii) خاصیت تلازم بلحاظ ضرب (iii) ضربی ذاتی عنصر
(iv) ثلاثی خاصیت (v) خاصیت مبادلہ بلحاظ ضرب (vi) تنسیخی خاصیت بلحاظ جمع
(vii) جمعی معکوس (viii) ضربی معکوس (ix) ضربی خاصیت

2. جمعی ذاتی عنصر ، جمعی معکوس ، خاصیت مبادلہ ، ضربی عمل کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق

3. (i) جمعی ذاتی عنصر (ii) ضربی عمل کی خاصیت تقسیمی بلحاظ تفریق (iii) جمعی معکوس
(iv) خاصیت بندش بلحاظ ضرب (v) ضربی معکوس

مشق 2.3

1. (i) $(-64)^{1/3}$ (ii) $\sqrt[5]{2^3}$ (iii) $-\sqrt[3]{7}$ (iv) $\sqrt[3]{y^{-2}}$

2. (i) غلط (ii) درست (iii) غلط (iv) غلط

3. (i) -5 (ii) $2\sqrt[4]{2}$ (iii) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{2}$ (iv) $-\dfrac{2}{3}$

مشق 2.4

1. (i) $\dfrac{7}{27(\sqrt[3]{3})}$ (ii) $-\dfrac{16x^2}{y^2}$ (iii) $\dfrac{x^{18}\ z^{12}}{y^6}$ (iv) 6

3. (i) 2 (ii) 6 (iii) 25 (iv) $\dfrac{1}{x^3}$

مشق 2.5

1. (i) $-i$ (ii) -1 (iii) 1 (iv) 1 (v) $-i$ (vi) $-i$

2. (i) $2-3i$ (ii) $3+5i$ (iii) i (iv) $-3-4i$ (v) $-4+i$ (vi) $-i-3$

3. (i) Re(Z) = 1, Im(Z) = 1 (ii) Re(Z) = –1, Im(Z) = 2,
(iii) Re(Z) = 2, Im(Z) = –3 (iv) Re(Z) = –2, Im(Z) = –2
(v) Re(Z) = 0, Im(Z) = –3 (vi) Re(Z) = 2, Im(Z) = 0

4. $x = 3, y = -3$

مشق 2.6

1. (i) غلط (ii) غلط (iii) درست (iv) درست (v) غلط (vi) درست (vii) درست

2. (i) $9+i$ (ii) $-11-4i$ (iii) $-1-14i$ (iv) $1+4i$

3. (i) $15-23i$ (ii) $2-10i$ (iii) $-4-6\sqrt{5}\,i$ (iv) $12-5i$

4. (i) $-1+i$ (ii) $\dfrac{5}{17}+\dfrac{14}{17}i$ (iii) $2-3i$ (iv) $-\dfrac{13}{10}-\dfrac{19}{10}i$
(v) $-1+0.i$ (vi) $\dfrac{5}{26}-\dfrac{1}{26}i$

5. (i) (a) i (b) 0 (c) $-2i$ (d) 1 (ii) (a) $2-i$ (b) 4 (c) $2i$ (d) 5
(iii) (a) $-i$ (b) 0 (c) $2i$ (d) 1 (iv) (a) $-\frac{1}{5}+\frac{11}{10}i$ (b) $-\frac{2}{5}$ (c) $-\frac{11}{5}i$ (d) $\frac{5}{4}$

7. (i) $x=\frac{5}{13}, y=\frac{14}{13}$ (ii) $x=-1, y=0$ (iii) $x=-\frac{7}{3}, y=-24$

اعادہ مشق 2

1. (i) a (ii) c (iii) a (iv) c (v) b (vi) c (vii) c (viii) d
(ix) b (x) a (xi) a (xii) c (xiii) b (xiv) a (xv) c

2. (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) غلط (v) درست (vi) غلط (vii) غلط (viii) درست (ix) درست

3. (i) $\frac{3}{x^2 y^3}$ (ii) $5x^{5n} y^{4m}$ (iii) xyz^2 (iv) $\frac{4z^2}{5\times 5^{3/5} x^4 y^2}$ 4. $\frac{6}{5}$ 5. $\frac{1}{5}$ 6. 1 7. 1

مشق 3.1

1. (i) 5.7×10^3 (ii) 4.98×10^7 (iii) 9.6×10^7 (iv) 4.169×10^2
(v) 8.3×10^4 (vi) 6.43×10^{-3} (vii) 7.4×10^{-3} (viii) 6×10^7
(ix) 3.95×10^{-9} (x) $\frac{2.75\times 10^5}{2.5\times 10^{-3}}$

2. (i) 0.0006 (ii) 50,600,000,000 (iii) 0.000009018 (iv) 786,500,000

مشق 3.2

1. (i) 2.3672 (ii) 1.4673 (iii) $\bar{4}.5051$ (iv) $\bar{1}.5059$

2. (i) 0.4926 (ii) 2.4926 (iii) $\bar{3}.4926$ (iv) $\bar{1}.4926$

3. (i) 3649 (ii) 0.5530

4. (i) 4 (ii) 36 (iii) 25 (iv) 1.6021 5. (i) -7 (ii) 6

6. (i) 32 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) 1 (iv) 8 (v) 81

مشق 3.3

1. (i) $\log A + \log B$ (ii) $\log 15.2 - \log 30.5$ (iii) $\log 21 + \log 5 - \log 8$
(iv) $\frac{1}{3}[\log 7 - \log 15]$ (v) $\frac{1}{3}\log 22 - 3\log 5$ (vi) $\log 25 + \log 47 - \log 29$

2. $\log\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$

3. (i) $\log 21\times 5$ (ii) $\log\frac{25}{3^2}$ (iii) $\log\frac{x^2}{y^3}$ (iv) $\log\frac{5\times 6}{2}$

4. (i) 4 (ii) 2

5. (i) 1.5050 (ii) 1.3801 (iii) 0.2615 (iv) 0.4259 (v) 1.4771

مشق 3.4

1. (i) 11.15 (ii) 2.302 (iii) 261 (iv) 1.258
   (v) 0.0895 (vi) 0.6229 (vii) 0.9811 (viii) 0.0008778

2. 329.2 3. 10 یونٹ 4. 707.1 5. 27.50

اعادہ مشق 3

1. (i) c (ii) b (iii) d (iv) a (v) b (vi) a (vii) d (viii) c (ix) b (x) c

2. (i) 10 (ii) خاصہ (iii) مینٹیسا (iv) ضدلوگارتھم (v) ایک (vi) 2

3. (i) 243 (ii) 4 (iii) 1 (iv) $\frac{1}{16}$

4. (i) 284.6 (ii) 1.521 (iii) 1.010 (iv) 0.04206

5. (i) 1.6532 (ii) 0.0279 (iii) $\bar{2}.6811$

6. (i) 2.942 (ii) 3.213 (iii) 4529

مشق 4.1

1. (i) نہیں (ii) نہیں (iii) ہاں (iv) نہیں

2. (i) نہیں (ii) ہاں (iii) ہاں (iv) نہیں

3. (i) $\frac{4y^2z^3}{x}$ (ii) $\frac{4a}{x-1}$ (iii) 1 (iv) $(x-y)^2$ (v) $\frac{x-1}{x-2}$ (vi) $\frac{x-2}{2(x+2)}$
   (vii) $4x(x-1)$ (viii) x^2+3x-4

4. (a) (i) $\frac{23}{6}=3\frac{5}{6}$ (ii) $-\frac{1}{4}$ (b) $-16\frac{5}{8}$

5. (i) $\frac{19}{2x-3y}$ (ii) $\frac{8x}{1-4x^2}$ (iii) $\frac{x+5}{x^2-36}$ (iv) $\frac{x-y}{x+y}$ (v) $\frac{x^2-15x+6}{2(x-3)(x+3)^2}$ (vi) 0

6. (i) $(x-7)(5x+2)$ (ii) $\frac{2}{3-x}$ (iii) 1 (iv) $\frac{-(x+5)}{x+1}$ (v) $\frac{x(x-2)}{y(x-1)}$

مشق 4.2

1. (i) $a^2+b^2=68$ (ii) $ab=2$

2. −22 3. 46 4. ± 14 5. $xy+yz+zx=40$ 6. 91

7. −3421 8. 316 9. 9217 10. 18 11. 364 12. 110

13. 234

14. (i) $(x-y)(x^2+xy+y^2-1)$ (ii) $\left(2x-\frac{1}{3y}\right)\left[4x^2+\frac{2x}{3y}+\frac{1}{9y^2}\right]$

15. (i) x^6+y^6 (ii) x^9-y^9 (iii) $x^{12}-y^{12}$ (iv) $64x^{12}-1$

مشق 4.3

1. (i) $6\sqrt{5}$ (ii) $27\sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt[3]{2}$ (iv) $2xyz\sqrt[5]{3xy^2z^3}$
2. (i) $\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $3xy^2z^3$ (iv) 4 (v) 21
3. (i) $\sqrt{5}$ (ii) $18\sqrt{3}$ (iii) 15 (iv) $6\sqrt{5}$
4. (i) 6 (ii) $8+2\sqrt{15}$ (iii) 2 (iv) 5/3 (v) x^4-y^4

مشق 4.4

1. (i) $\sqrt{3}/4$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{6}/6$ (iv) $-\frac{1}{11}(3-2\sqrt{5})$

   (v) $\sqrt{31}+4$ (vi) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (vii) $2-\sqrt{3}$ (viii) $4+\sqrt{15}$
2. (i) $3-\sqrt{7}$ (ii) $4+\sqrt{5}$ (iii) $2-\sqrt{3}$ (iv) $2-\sqrt{5}$

   (v) $5-\sqrt{7}$ (vi) $4+\sqrt{15}$ (vii) $7+\sqrt{6}$ (viii) $9-\sqrt{2}$
3. (i) $2+\sqrt{3}$ (ii) $-4-\sqrt{17}$ (iii) 4
4. (i) $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ (ii) $2\sqrt{5}$ (iii) 0
5. (i) $2\sqrt{3}$, 12 (ii) $\frac{14}{3}, \frac{178}{9}, \frac{2366}{27}$ 6. $a=4, b=0$

اعادہ مشق 4

1. (i) a (ii) d (iii) b (iv) a (v) b (vi) b (vii) d (viii) c
2. (i) 4 (ii) $(x-2)(x+2)$ (iii) x^2-1+1/x^2 (iv) $(a+b)^2+(a-b)^2$

   (v) $x^2+\frac{1}{x^2}-2$ (vi) 3 (vii) $2+\sqrt{3}$
3. (i) 7 (ii) 47 4. (i) 6 (ii) 34 5. 65, 4
6. (i) 4 (ii) $2\sqrt{3}$ (iii) 14 (iv) $8\sqrt{3}$
7. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) 4 (iii) 18 (iv) $8\sqrt{5}$ 8. (i) $\frac{a^2+\sqrt{a^4-4}}{2}$ (ii) $\frac{2\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

مشق 5.1

1. (i) $2ab(c-2x+d)$ (ii) $3y(3x-4x^2+6y)$

   (iii) $-3x(xy+1-3y^2)$ (iv) $5abc(bc^2-2ab^2-4a^2c)$

   (v) $x^2y(x-3y)(3x-7y)$ (vi) $2xy^2(x^2+5)(y+4)$
2. (i) $(a-b)(5x-3y)$ (ii) $(y-4)(3x+2)$

   (iii) $(x-2y)(x^2+3y^2)$ (iv) $(x-z)(xz+y^2)$
3. (i) $(12a+1)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2$

(iii) $(x+y-7z)^2$ (iv) $3(2x-3)^2$

4. (i) $3(x-5y)(x+5y)$ (ii) $(x-y)(x+y-1)$
(iii) $2a(8m-11n)(8m+11n)$ (iv) $3x(1-9x)(1+9x)$

5. (i) $(x+y+3)(x-y-3)$ (ii) $(x-a+1)(x+a-1)$
(iii) $(2x+y+1)(2x-y-1)$ (iv) $(x+y-1)(x-y-3)$
(v) $(5x-1+6z)(5x-1-6z)$ (vi) $(x+y-2z)(x-y-2z)$

مشق 5.2

1. (i) $\left(x^2-\frac{1}{x^2}+1\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}-1\right)$ (ii) $3(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$
(iii) $(a^2+2b^2+ab)(a^2+2b^2-ab)$ (iv) $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$
(v) $(x^2+3x+5)(x^2-3x+5)$ (vi) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

2. (i) $(x+8)(x+6)$ (ii) $(x-12)(x-9)$
(iii) $(x-14)(x+3)$ (iv) $(x-11)(x+12)$

3. (i) $(2x+5)(2x+1)$ (ii) $(5x-3)(6x+5)$
(iii) $(8x-3)(3x-7)$ (iv) $(5x-21)(x+1)$
(v) $(4x-y)(x-4y)$ (vi) $(x-13y)(3x+y)$
(vii) $(5x-2y)(x+7y)$ (viii) $\left(5x-\frac{1}{x}+2\right)\left(5x-\frac{1}{x}+2\right)$

4. (i) $(x^2+5x+7)(x^2+5x+3)$ (ii) $(x-5)(x+1)(x-2)^2$
(iii) $(x^2+7x+15)(x^2+7x+7)$ (iv) $(x-8)(x+7)(x-3)(x+2)$
(v) $x^2(x+\frac{6}{x}+8)(x+\frac{6}{x}+4)$

5. (i) $(x-4)^3$ (ii) $(2x+5)^3$ (iii) $(x-6)^3$ (iv) $(2x-5y)^3$

6. (i) $(3+2x)(9-6x+4x^2)$ (ii) $(5x-6y)(25x^2+30xy+36y^2)$
(iii) $(4x+3y)(16x^2-12xy+9y^2)$ (iv) $(2x+5y)(4x^2-10xy+25y^2)$

مشق 5.3

1. (i) 4 (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 84 (iv) -12 (v) -42

2. (i) $3, -1$ (ii) 6

3. (i) $(x-2)$ جزوِضربی ہے ، $(x-3)$ جزوِضربی نہیں ہے
(ii) $(x-2), (x+3)$ جزوِضربی ہیں، لیکن $(x-4)$ جزوِضربی نہیں ہے

4. $m=-24$ 5. $k=-1$ 6. $a=-2, b=2$

7. $l=2, m=-2$ 8. $l=-1, m=2$ 9. $a=2, b=7$

مشق 5.4

1. $(x-1)(x+1)(x-2)$ 2. $(x-2)(x-4)(x+5)$

3. $(x+1)(x-2)(x-5)$ 4. $(x-1)(x-2)(x+4)$
5. $(x-1)(x-3)(x+2)$ 6. $(x-2)(x+3)(x+4)$
7. $(x-2)(x+2)(3x-1)$ 8. $(x-1)(x+1)(2x+1)$

اعادہ مشق 5

1. (i) b (ii) c (iii) d (iv) b (v) c (vi) c (vii) c (viii) a
2. (i) $(x+2)(x+3)$ (ii) $4(a-2)(a+2)$ (iii) b^2 (iv) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$ (v) x^3+y^3
   (vi) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ (vii) -3
3. (i) $(x+2y+4)(x-2y+4)$ (ii) $4(x-2y)(x+2y)$ (iii) $(3x+8)(3x+1)$
   (iv) $(1-4z)(1+4z+16z^2)$ (v) $\left(2x-\frac{1}{3y}\right)\left(4x^2+\frac{2x}{3y}+\frac{1}{9y^2}\right)$
   (vi) $(y+3)(2y-1)$ (vii) $(x-2)(x+2)(x+1)$
   (viii) $(5mn+1)^2$ (ix) $(1-6pq)^2$

مشق 6.1

1. (i) H.C.F. $= 13x^5y^3z$ (ii) H.C.F. $= 17xyz$
2. (i) HCF $= x+2$ (ii) HCF $= x-3$ (iii) HCF $= x-1$
   (iv) HCF $= 6(x-1)$ (v) HCF $= 18x(3x-1)$
3. (i) x^2-3x+2 (ii) x^2+x-3 (iii) $x^2+x=x(x+1)$
4. (i) L.C.M. $= 273x^7y^6z^7$ (ii) L.C.M. $= 5610x^2y^2z^2$
5. (i) LCM $= (x-5)(x-20)(x+4)$ (ii) LCM $= (x+2)^2(x-2)(2x-3)$
   (iii) LCM $= 6(x+2y)(x^4-y^4)$ (iv) LCM $= 12(x-1)(x^4-1)$
6. $k=5$ 7. $k=-2, l=6$
8. $q(x)=2(x^4-1)$ 9. $10x(x-1)^2(x-2)(x^2-9)$
10. $k=8$ 11. بچے 16

مشق 6.2

1. $\frac{2(x+4)}{x+3}$ 2. $\frac{12x}{x^4-1}$ 3. 0 4. $\frac{3x+10}{x-3}$ 5. $\frac{-1}{2(3-2x)}$
6. $\frac{4a}{a^2-1}$ 7. 0 8. $\frac{x+2}{x+3}$ 9. $\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2}$
10. $\frac{(x+4)(x^2+2x+4)}{(x-1)^2}$ 11. 1 12. $\frac{y+4}{y-4}$ 13. $\frac{xy}{x^2+y^2}$

مشق 6.3

1. (i) $(2x-3y)$ (ii) $x-\frac{1}{2x}$ (iii) $\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{6}\right)$ (iv) $(5b-a)$

(v) $\left(\frac{2x^3-3y^3}{3x^2+4y^2}\right)$ (vi) $\left[x-2-\frac{1}{x}\right]$ (vii) $\left[x^2-2\ \frac{1}{x^2}\right]$

(viii) $(x+1)(x+2)(x+3)$ (ix) $(x+1)(x+7)(2x-3)$

2. (i) $(2x+3y+4)$ (ii) (x^2-5x+6) (iii) $(3x^2-x+1)$

(iv) $(4x^2-3x+2)$ (v) $\left(\frac{x}{y}-5+\frac{y}{x}\right)$

3. (i) $k=49$ (ii) $k=12$ 4. (i) $l=24, m=36$ (ii) $l=-60, m=-36$

5. (i) $x-3$ (ii) $-x+3$ (iii) $x=3$

اعادہ مشق 6

1. (i) b (ii) a (iii) c (iv) b (v) a (vi) a (vii) a (viii) b
(ix) c (x) c (xi) c (xii) a (xiii) a (xiv) d (xv) b (xvi) c (xvii) b

2. $4(x-2)$ 3. $y+3$ 4. $3(2x+5)(3x+1)(2x-5)^2$

5. $(x^2-2x+8)(x^4+2x^3-4x^2-x+28)$ 6. (i) $\frac{6}{1-x^4}$ (ii) $1/a$

7. $\pm\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right]$ 8. $\pm\left(\frac{2x}{y}+5-\frac{3y}{x}\right)$

مشق 7.1

1. (i) $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ (ii) $\{6\}$ (iii) $\left\{\frac{5}{18}\right\}$ (iv) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ (v) $\{-63\}$

(vi) $\{-12\}$ (vii) $\left\{\frac{5}{4}\right\}$ (viii) حل ممکن نہیں (ix) $\{2\}$ (x) $\{5\}$

2. (i) $\{0\}$ (ii) $\{6\}$ (iii) $\{52\}$ (iv) $\left\{\frac{9}{4}\right\}$

(v) $\{-5\}$ (vi) $\{10\}$ (vii) ϕ (viii) $\left\{-\frac{19}{7}\right\}$

مشق 7.2

1. (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) درست (v) غلط

2. (i) $\left\{3, \frac{1}{3}\right\}$ (ii) $\left\{\frac{28}{3}, -\frac{32}{3}\right\}$ (iii) $\{-8, 3\}$ (iv) $\left\{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

(v) $\{2, -6\}$ (vi) ϕ (vii) $\left\{-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right\}$ (viii) $\left\{1, \frac{17}{5}\right\}$

مشق 7.3

1. (i) $\{x \mid x > 5/2\}$ (ii) $x \geq -0.5$ (iii) $x \leq \frac{44}{3}$ (iv) $x \leq -6.5$

(v) $x < \frac{8}{3}$ (vi) $x > \frac{3}{13}$ (vii) $x > -\frac{7}{4}$ (viii) $x > \frac{1}{26}$

2. (i) $-3 < x < 1$ (ii) $\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$ (iii) $-22 < x < 26$

(iv) $1 \leq x \leq 5$ (v) $2 < x \leq 5$ (vi) $-16 < x < 19$

(vii) $-4 < x \leq 4$ (viii) $-8 < x < 3$

اعادہ مشق 7

1. (i) d (ii) c (iii) c (iv) b (v) c (vi) d

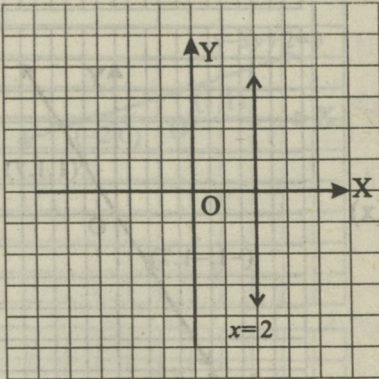
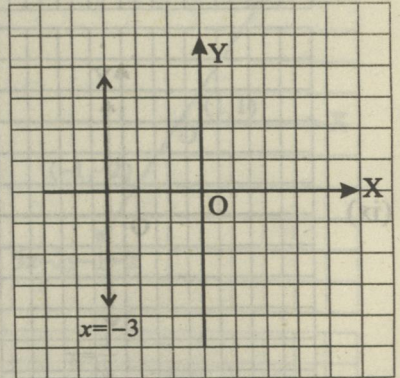
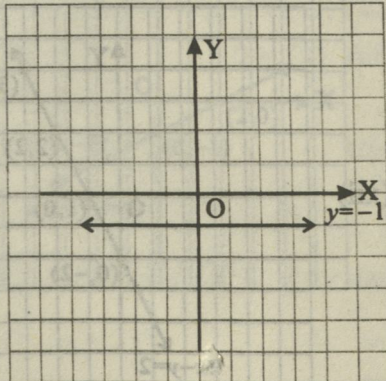
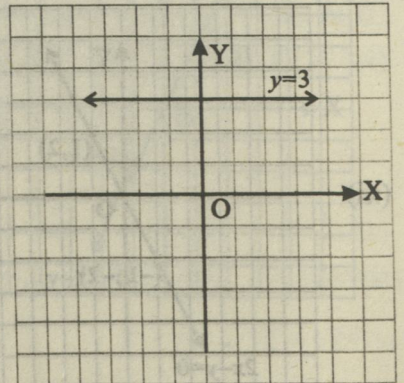
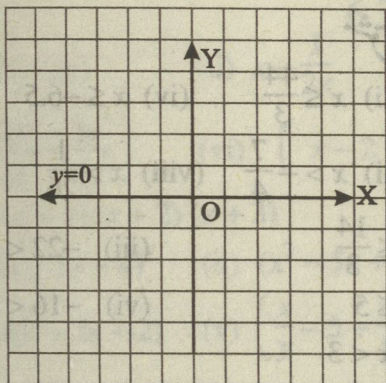
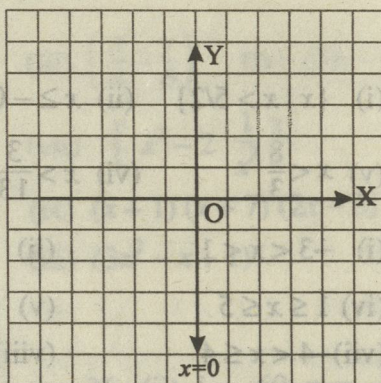
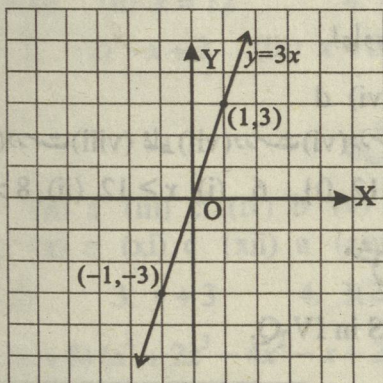
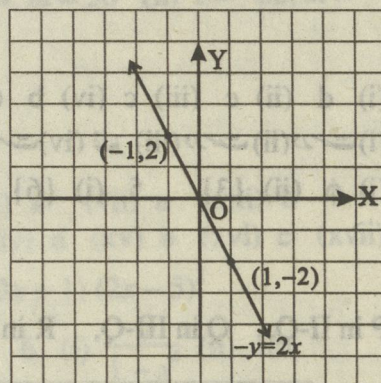
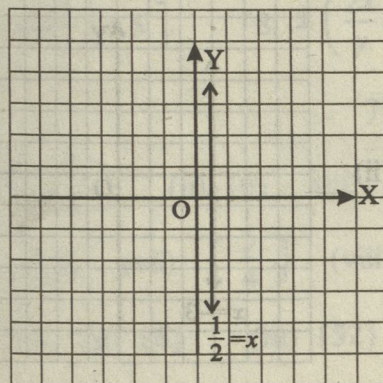
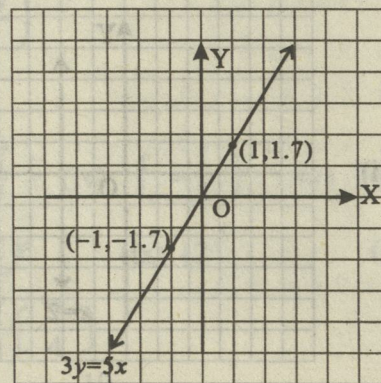
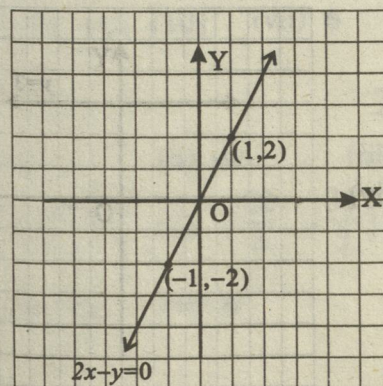
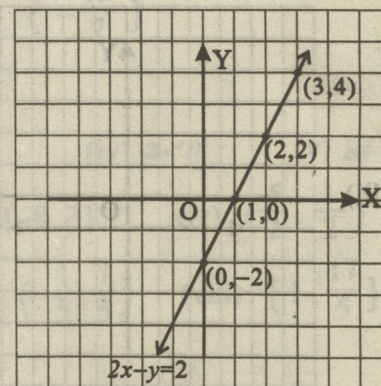
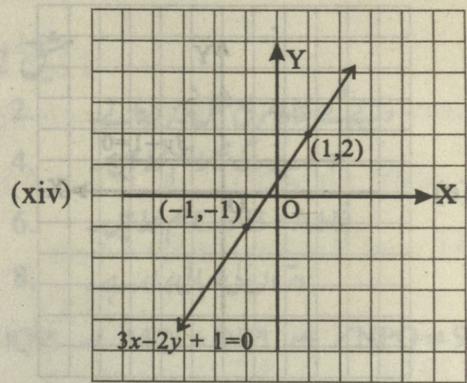
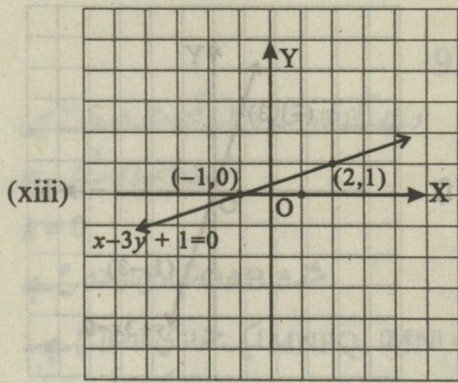
2. (i) درست (ii) درست (iii) غلط (iv) درست (v) درست (vi) درست (vii) غلط (viii) درست (ix) درست

4. (i) ϕ (ii) $\{3\}$ 5. (i) $\{6\}$ (ii) $\{-12, 0\}$ 6. (i) $x \geq 12$ (ii) $8 > x > -2$

مشق 8.1

1. P in II-Q, Q in III-Q, R in I-Q, S in IV-Q.

2. (i) (ii) (iii) (iv)

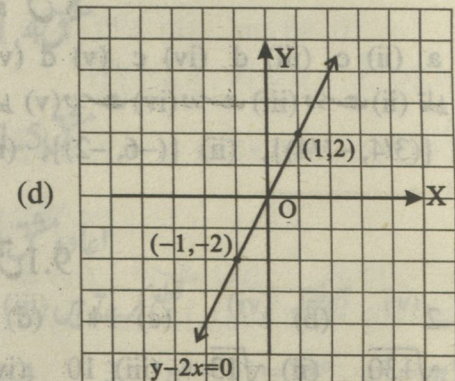
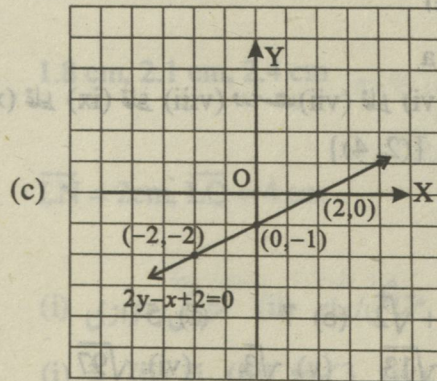
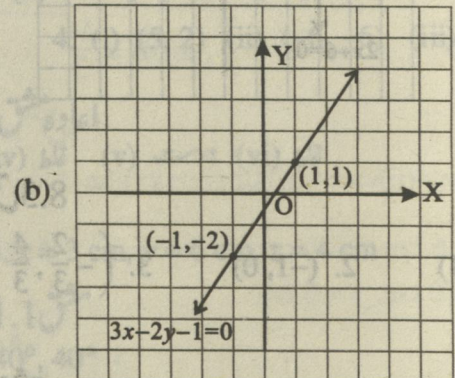
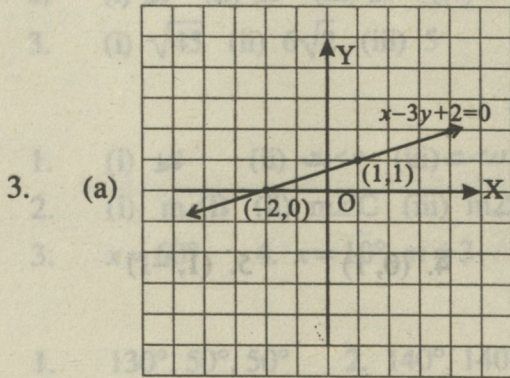
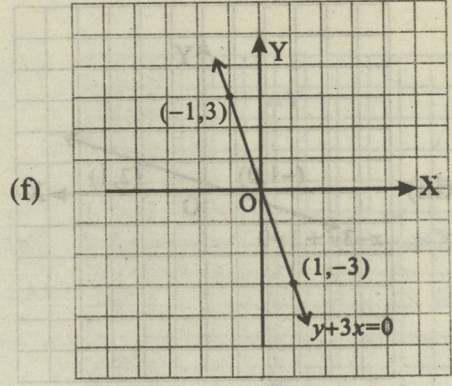
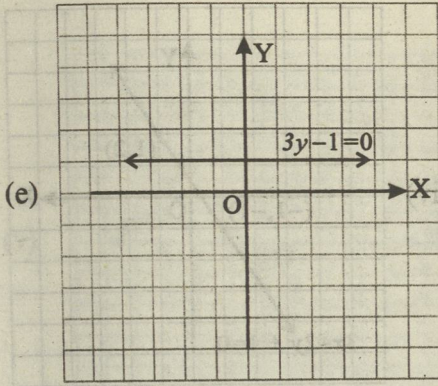
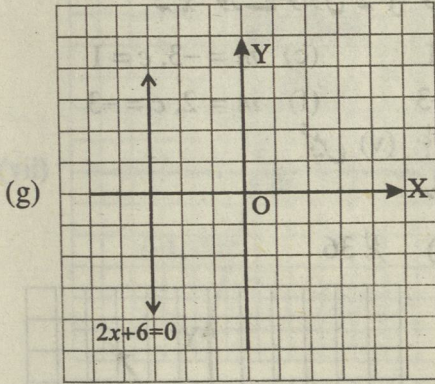
(v)
Y
y=0
X
O
(vi)
Y
X
O
x=0
(vii)
Y
y=3x
(1,3)
X
O
(−1,−3)
(viii)
Y
(−1,2)
X
O
(1,−2)
−y=2x
(ix)
Y
X
O
1/2 =x
(x)
Y
(1,1.7)
X
O
(−1,−1.7)
3y=5x
(xi)
Y
(1,2)
X
O
(−1,−2)
2x−y=0
(xii)
Y
(3,4)
(2,2)
X
O
(1,0)
(0,−2)
2x−y=2

3. (i) y- محور کے متوازی (ii) y- محور کے متوازی (iii) x- محور کے متوازی
(iv) نہ x- محور کے متوازی نہ y- محور کے (v) نہ x- محور کے متوازی نہ y- محور کے

4. (a) $m=-\frac{2}{3}, c=\frac{1}{3}$ (b) $m=\frac{1}{2}, c=1$ (c) $m=-3, c=1$
(d) $m=2, c=-7$ (e) $m=2, c=-3$ (f) $m=2, c=-3$

5. (i) نہیں (ii) نہیں (iii) نہیں (iv) ہاں (v) نہیں

مشق 8.2

1. (i) 4 گیلن (ii) 36 لٹر

3. (a) (b) (c) (d)

مشق 8.3

1. $(-1, 1)$ 2. $(-1, 0)$ 3. $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ 4. $(0, 1)$ 5. $(1, -1)$

اعادہ مشق 8

1. (i) a (ii) c (iii) d (iv) c (v) d (vi) a
2. (i) غلط (ii) درست (iii) درست (iv) درست (v) غلط (vi) غلط (vii) درست (viii) غلط (ix) غلط (x) غلط
6. (i) $\{(3/4, -1/4)\}$, (ii) $\{(-6, -2)\}$, (iii) $\{(2, 4)\}$

مشق 9.1

1. (a) 2 (b) 1 (c) 14 (d) $3+\sqrt{2}$ (e) 7 (f) 5
2. (i) $\sqrt{130}$ (ii) $\sqrt{13}$ (iii) 10 (iv) $\sqrt{13}$ (v) $\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{97}$

مشق 9.2

1. دیے گئے نقاط متساوی الساقین مثلث بناتے ہیں
2. دیے گئے نقاط مربع شکل نہیں بناتے۔
3. مثلث قائمہ زاویہ نہیں ہے
4. دیئے گے نقاط ہم خط ہیں۔
5. $k = 0$
6. نقاط A ، B اور C ہم خط ہیں۔
7. مثلث OAB متساوی الاضلاع ہے
8. وتروں کی لمبائی برابر ہے۔
9. MNPQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ $|MN| = |QP|$ اور $|MQ| = |NP|$ اور $\angle NPQ \neq 90°$.
10. قطر کی لمبائی = 10

مشق 9.3

1. (a) (8, 2) (b) (2.5, –6) (c) (–1, 1) (d) (–4, 3) (e) (3, –7.5) (f) (0, –2.5)
2. (13, 10)
4. 3/2

اعادہ مشق 9

1. (i) d (ii) c (iii) a (iv) c (v) c (vi) b
2. (i) غلط (ii) غلط (iii) غلط (iv) درست (v) درست (vi) درست (vii) درست
3. (i) $\sqrt{45}$ (ii) $6\sqrt{2}$ (iii) 5
4. (i) (5, 2) (ii) (–6, –6) (iii) (4, –6)

اعادہ مشق 10

1. (i) غلط (ii) درست (iii) درست (iv) غلط (v) درست (vi) غلط
2. (i) $m\angle B$ (ii) $m\angle C$ (iii) $m\angle L$
3. $x = 60°$
4. $x = 10°, m = 3$
5. $x = 3$ cm, $y = 6$ cm, $z = 4$ cm

مشق 11.1

1. 130°, 50°, 50°
2. 140°, 140°, 40°, 40°

مشق 11.4

1. 1.8 cm, 2.1 cm, 2.4 cm

مشق 11.5

1. $\overline{LN} = 2$cm, $\overline{LQ} = 4$ cm

اعادہ مشق 11

1. (i) متماثل/متوازی (ii) متماثل/برابر (iii) قطع کرتے ہیں (iv) ہم نقطہ (v) متماثل
2. (i) $\cong$ (ii) $\cong$ (iii) $m\angle 3$ (iv) $m\angle 4$
3. $n° = y° = 75°$, $x° = m° = 105°$
4. $x = 5°$, $m = 23°$
5. $m = n = 2$
6. $\angle M = 125° = \angle P$

اعادہ مشق 12

1. (i) درست (ii) درست (iii) غلط (iv) درست (v) غلط (vi) درست (vii) غلط (viii) درست

2. (i) $m\overline{OB}$ (ii) $m\overline{BQ}$ 4. $x° = y° = 30°, z° = 60°$ 5. $m = 12, x = 6$

6. $m\overline{AL} = m\overline{LB} = 3$ cm, $m\overline{AD} = 4$ cm

مشق 13.1

1. (b) 20 cm 3. $\overline{AC}$ (سب سے بڑا), $\overline{AB}$ (سب سے چھوٹا)

اعادہ مشق 13

1. (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) غلط (v) درست (vi) درست (vii) غلط (viii) درست (ix) درست (x) غلط

2. 90° 5. $3 + 4 \not> 7$

مشق 14.1

1. (i) 2.6 cm (ii) 6 cm (iii) 1.8 cm (iv) 6cm, 3.6 cm, 8 cm, 4.8 cm (v) $x = 1$

مشق 14.2

1. (a) 5 2. $m\overline{AD} = \frac{7}{3}$, $m\overline{DB} = \frac{14}{3}$

اعادہ مشق 14

1. (i) درست (ii) درست (iii) غلط (iv) غلط (v) درست (vi) غلط (vii) درست (viii) درست (ix) غلط (x) درست

3. (i) 4.6 cm (ii) 2 cm 4. $x = 1$ 5. $m\overline{MA} = 4.8$, $m\overline{AN} = 3.2$

6. $x = 10$ cm, $y = 6$ cm

مشق 15·1

3. 15 4. (i) 48 cm (ii) 672 cm^2

6. (i) $a = 2\sqrt{15}$, $h = \sqrt{35}$, $b = 2\sqrt{21}$ (ii) 9 cm

7. $100\sqrt{34}$ m 8. 15 m 9. $m\overline{AD} = \sqrt{61}$ km

اعادہ مشق 15

1. (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) درست (v) درست (vi) غلط

2. (i) 5m (ii) 8 cm (iii) 12 cm (iv) 1 cm

مشق 16.1

2. $m\overline{AD} = \frac{35}{4}$ cm

اعادہ مشق 16

1. (i) درست (ii) غلط (iii) درست (iv) غلط (v) درست (vi) درست

2. (i) 18 cm^2 (ii) 16 cm^2 (iii) 32 cm^2 (iv) 80 cm^2

اعادہ مشق 17

1. (i) وتر (ii) وسطانیہ (iii) عمود (iv) ہم نقطہ
   (v) مساوی الفاصلہ (vi) متناسب (vii) راس

2. (i) (d) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (a) (v) (b) (vi) (b)
   (vii) (a) (viii) (c) (ix) (d) (x) (a) (xi) (a)

فرہنگ (GLOSSARY)

قالب (Matrix)

حقیقی اعداد کی مدد سے ایک مستطیلی بناوٹ مثلاً 0,1,2,3,4 اور 7 نمبروں کی مدد سے بناوٹ، $\begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{matrix}$ کو بڑی بریکٹ میں بند کر دینے سے حاصل شکل $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ کو قالب کہا جاتا ہے۔

مستطیلی قالب (Rectangular Matrix)

ایسا کوئی بھی قالب مستطیلی قالب کہلاتا ہے جس میں قطاروں کی تعداد اس کے کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو۔

مربعی قالب (Square Matrix)

ایک دیا ہوا قالب M مربعی قالب کہلاتا ہے اگر اس میں موجود قطاروں کی تعداد اس میں کالموں کی تعداد کے برابر ہو۔

قطاری قالب (Row Matrix)

ایسا قالب قطاری قالب کہلاتا ہے جس میں صرف ایک ہی قطار ہو۔

کالمی قالب (Column Matrix)

ایسا قالب کالمی قالب کہلاتا ہے جس میں صرف اور صرف ایک ہی کالم ہو۔

صفری قالب (Null or Zero Matrix)

ایک دیا ہوا قالب صفری قالب کہلاتا ہے اگر اس میں ہر رکن صفر ہو۔

ٹرانسپوز قالب (Transpose Matrix)

دیے ہوئے قالب M کی قطاروں کو کالموں میں بدل دینے سے نئے قالب $(M)^t$ کو قالب M کا ٹرانسپوز قالب کہا جاتا ہے۔ یاد رہے R_1 کو C_1 ، R_2 کو C_2 اور R_3 کو C_3 وغیرہ میں بدلا جائے۔ اسی طرح کالموں کو باہم قطاروں میں بدل دینے سے نیا قالب $(M)^t$ ہی ٹرانسپوز قالب ہوگا۔

سیمٹرک قالب (Symmetric Matrix)

ایک ایسا مربعی قالب A سیمٹرک قالب کہلاتا ہے جس کا ٹرانسپوز قالب $(A)^t$ قالب A کے مساوی قالب ہو۔

منفی قالب (Negative Matrix)

دیئے ہوئے قالب A کا منفی قالب A– ہوگا جس میں دیئے ہوئے قالب A کا ہر رکن اس کے منفی اندراج میں بدل دیا جائے۔

سکیوسیمٹرک قالب (Skew Symmetric Matrix)

ایک مربعی قالب A کو سکیوسیمٹرک قالب کہا جاتا ہے اگر $(A)^t = -A$

وتری قالب (Diagonal Matrix)

ایسا مربعی قالب جس میں وتر کے ارکان میں سے کم از کم ایک رکن صفر نہ ہو اور وتری ارکان کے علاوہ تمام ارکان صفر ہوں وتری قالب کہلاتا ہے۔

سکیلر قالب (Scalar Matrix)

ایسا وتری قالب جس میں وتر کے تمام ارکان یا اندراج یکساں، ہوں سکیلر قالب کہلاتا ہے۔

قالب $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ ایک سکیلر قالب ہے۔ اگر $k \neq 0$

وحدانی یا ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity Matrix)

ایک وتری قالب جو سکیلر قالب بھی ہو اور ہر وتری رکن '1' ہو وحدانی یا ضربی ذاتی قالب کہلاتا ہے جس کو 'I' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

قالب کا جمعی ذاتی قالب (Additive Identity of a Matrix)

اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں اور بلحاظ جمعی خاصیت $A+B = A = B + A$ ہو تو قالب B قالب A کا جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے۔

کسی بھی قالب A کا ہم مرتبہ صفری قالب O قالب A کا جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے

جبکہ $$A + O = A = O + A$$

قالب کا جمعی معکوس (Additive Inverse of a Matrix)

اگر A اور B دو ہم مرتبہ قالب ہوں جو مندرجہ ذیل جمعی خاصیت کے حامل ہوں

$$A + B = O = B + A$$

تو قالب A اور B دونوں ایک دوسرے کے جمعی معکوس کہلاتے ہیں پس قالب A کا جمعی معکوس وہ قالب ہوگا جو قالب A کے تمام غیر صفری ارکان کو ان کے جمعی معکوس ارکان میں بدل دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

ضربی ذاتی قالب (Multiplicative Identity of a Matrix)

دو قالب A اور B ہوں تو قالب B قالب A کا ضربی ذاتی قالب کہلائے گا۔ اگر

$$AB = A = BA$$

ایک 2-by-2 قالب کا مقطع (Determinant of a 2-by-2 Matrix)

ایک مربعی 2-by-2 قالب $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کے مقطع کو $|A|$ یا det A سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس کی تعریف یوں کی جاتی ہے:

$$|A| = \det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \lambda \in R$$

نادر قالب (Singular Matrix)

ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر اس کا مقطع $|A|$ صفر کے مساوی ہو یا $|A| = 0$

غیر نادر قالب (Non-Singular Matrix)

ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر A کا مقطع صفر کے مساوی نہ ہو یا $|A| \neq 0$

قالب کا ایڈ جائنٹ (Adjoint of a Matrix)

اگر قالب $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہو تو اس کا ایڈ جائنٹ قالب ایک ایسا قالب ہے جو A کے وتری ارکان کو باہمی تبدیل کرنے کے ساتھ غیر وتری ارکان کو منفی ارکان میں بدل دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

جیسا کہ

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

اگر $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک مربعی قالب ہوتو اس کا ضربی معکوس متعارف اور ظاہر یوں کیا جاتا ہے۔

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{\text{Adj } M}{\det M}$$

جبکہ $\det M = ad - bc \neq 0$ اور $\text{Adj } M = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

حقیقی اعداد کا سیٹ (Set of Real Numbers)

تمام ناطق اور غیر ناطق اعداد کا سیٹ حقیقی اعداد کا سیٹ R جانا اور مانا جاتا ہے۔

یعنی $R = Q \cup Q'$

جبکہ Q اور Q' دونوں حقیقی اعداد کے سیٹ R کے تحتی سیٹ ہیں۔

اور $Q \cap Q' = \phi$

'a' کا n واں جذر (*n*th Root of *a*)

اگر n ایک مثبت صحیح عدد 1 سے بڑا ہوتو ایک حقیقی نمبر x جو حقیقی نمبر a کا n واں رُوٹ (جذر) ہو ریڈیکل کہلاتا ہے۔

یعنی اگر $x^n = a$ ہوتو علامتی طور پر یوں لکھا جاتا ہے:

$x = \sqrt[n]{a}$ .... (ریڈیکل شکل)

یا $x = (a)^{1/n}$ .... (قوت نمائی شکل)

ریڈیکل $\sqrt[n]{a}$ میں علامت $\sqrt{\ }$ ریڈیکل کا نشان (جذری علامت) کہلاتا ہے اور n کو ریڈیکل کا انڈیکس کہتے ہیں۔ حقیقی نمبر a ریڈیکل نشان کے ساتھ ریڈیکنڈ یا ریڈیکل کی اساس/بنیاد (base) کہلاتا ہے۔

غیر حقیقی عدد (Complex Number)

ایک عدد $z = a + bi$ ، جس میں $a, b \in R$ اور $i = \sqrt{-1}$ ایک کمپلیکس (غیر حقیقی) عدد کہلاتا ہے

غیر حقیقی عدد کا کانجوگیٹ (Conjugate of a Complex Number)

غیر حقیقی اعداد $a + bi$ اور $a - bi$ باہم ایک دوسرے کا کانجوگیٹ کہلاتے ہیں۔

کسی دیے گئے عدد کو سائنسی ترقیم میں لکھنے کے لیے اسے $a \times 10^n$ کے طور پر لکھا جاتا ہے۔ جبکہ $1 \leq a < 10$ اور n ایک صحیح عدد ہو۔

حقیقی عدد کا لوگارتھم (Logarithm of a Real Number)

اگر $a^x = y$ جبکہ $a, x, y \in R$ اور $a > 0, y > 0$ اور $a \neq 1$ تو x کو اساس 'a' پر y کا لوگارتھم کہتے ہیں اور اسے $\log_a y = x$ لکھتے ہیں۔

عام لوگارتھم (Common Logarithm)

اساس 10 کے لوگارتھم کو عام لوگارتھم یا برگز (Briggs) لوگارتھم کہتے ہیں۔

قدرتی لوگارتھم (Natural Logarithm)

اساس e کے لوگارتھم کو نیپئر (Napier) لوگارتھم یا قدرتی لوگارتھم کہتے ہیں۔

خاصہ (Characteristic)

کسی عدد کے لوگارتھم کے صحیح عددی حصے کو لوگارتھم کا خاصہ کہتے ہیں۔

مینٹیسا (Mantissa)

کسی عدد کے لوگارتھم کے کسری حصے کو مینٹیسا کہتے ہیں جو ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

ناطق جملہ (Rational Expression)

ایسا جملہ جو $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی شکل میں لکھا جا سکے جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہوں اور $q(x) \neq 0$ ، ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مقدارِ اصم (Surd)

ایسی غیر ناطق مقدار (یا جملہ) جس میں جذری علامت $\sqrt{\ }$ کے نیچے ناطق مقدار درج ہو، اسے مقدارِ اصم کہتے ہیں۔

”اگر کسی کثیر رقمی جملے $p(x)$ کو ایک درجہ والے جملہ $(x - a)$ پر تقسیم کیا جائے تو $p(a)$ بطور باقی حاصل ہوتا ہے۔“

مسئلہ تجزی (Factor Theorem)

(i) ”اگر کسی کثیر رقمی $p(x)$ کے لیے $p(a) = 0$ ہو تو $(x - a)$ کثیر رقمی کا ایک جُزو ضربی ہوتا ہے۔“

(ii) ”اس کے برعکس اگر $(x - a)$ کثیر رقمی $p(x)$ کا جزو ضربی ہو تو $p(a) = 0$ ہوتا ہے۔“

یک درجی مساوات (Linear Equation)

ایک متغیر x میں یک درجی مساوات کی معیاری شکل درج ذیل ہے:

$ax + b = 0$ ، جبکہ $a \neq 0$ اور $a, b \in R$

مساواتوں کی اقسام (Types of Equations)

(i) ایسی مساوات جو متغیر کی ہر قیمت کے لیے دُرست ثابت ہو یونیورسل مساوات یا آئیڈنٹٹی (identity) کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر $x + 3 = 3 + x$

(ii) ایسی مساوات جو متغیر کی کم از کم ایک قیمت کے لیے درست ہو لیکن آئیڈنٹٹی نہ ہو مشروط مساوات کہلاتی ہے۔

مثلاً $2x + 1 = 9$

(iii) ایسی مساوات جس کا حل خالی سیٹ ہو(کیونکہ متغیر کی کوئی بھی قیمت مساوات کو درست ثابت نہیں کرتی) نا قابل حل مساوات کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر $x = x + 5$

جذری مساوات (Radical Equation)

ایسی مساوات جس میں کوئی جذری علامت والا متغیر ہو، جذری مساوات کہلاتی ہے۔

حقیقی عدد کی مطلق قیمت (Absolute Value of a Real Number)

کسی حقیقی عدد 'a' کی مطلق قیمت کو $|a|$ سے ظاہر کرتے ہیں اور اس کی تعریف درج ذیل ہے

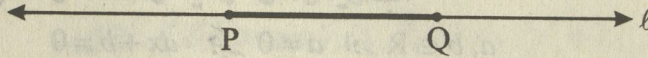
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{اگر } a \geq 0 \\ -a, & \text{اگر } a < 0 \end{cases}$$

ایک متغیر x میں یک درجی یا لینئر غیر مساوات کی معیاری شکل مندرجہ ذیل ہے:

$$ax + b < 0, \ a \neq 0; \ a, b \in R$$

ہم علامت '<'، کو $>$، $\leq$ یا $\geq$ سے بھی بدل سکتے ہیں۔

قطعہ خط (Line Segment)

کسی خط ℓ پر واقع دو مختلف نقاط P اور Q اور ان کے درمیان تمام نقاط پر مشتمل سیٹ کو قطعہ خط PQ کہتے ہیں اور اسے علامتی طور پر $\overline{PQ}$ یا $\overline{QP}$ لکھتے ہیں۔

نقطہ کے کوآرڈینیٹ (Coordinates of a Point)

حقیقی اعداد x اور y کے مترتب جوڑے (x, y) کا کوآرڈینیٹ مستوی میں مطابقتی نقطہ $P(x, y)$ ہو تو x اور y کو نقطہ P کے محددات (coordinates) کہتے ہیں۔ پہلے عدد x کو x-محدد (abscissa) اور دوسرے عدد y کو y-محدد (ordinate) کہتے ہیں۔

فاصلہ فارمولا (Distance Formula)

اگر $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ مستوی کے دو نقاط ہوں تو ان کے درمیان فاصلے کا فارمولا:

$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

جبکہ $d \geq 0$ (ہمیشہ)

ہم خط یا غیر ہم خط نقاط (Collinear or non-Collinear Points)

دو یا دو سے زیادہ نقاط جو کسی مستوی کے ایک ہی خط پر واقع ہوں ہم خط (collinear) کہلاتے ہیں (بحوالہ اس خط کے)۔ جو نقاط ہم خط نہ ہوں یا ایک سے زیادہ خطوط پر واقع ہوں غیر ہم خط (non-collinear) کہلاتے ہیں۔

متساوی الاضلاع مثلث (Equilateral Triangle)

اگر دی ہوئی مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائی برابر ہو تو مثلث متساوی الاضلاع مثلث کہلاتی ہے۔

ایک متساوی الساقین مثلث PQR ایسی مثلث ہے جس کے دو اضلاع کی لمبائی برابر جبکہ تیسرے ضلع کی لمبائی مختلف ہو۔

قائمہ زاویہ مثلث (Right Angled Triangle)

ایک مثلث جس کے اندرونی زاویوں میں سے ایک زاویہ 90° کا ہو قائمہ زاویہ مثلث کہلاتی ہے۔

مسئلہ فیثاغورث (Pythagoras' Theorem)

کسی قائمہ زایہ مثلث ABC میں

$\angle ACB = 90°$ جبکہ ، $|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2$

مختلف الاضلاع مثلث (Scalene Triangle)

ایک مثلث مختلف الاضلاع مثلث کہلاتی ہے اگر اس کے تینوں اضلاع کی لمبائی ایک دوسرے سے مختلف ہو۔

مربع (Square)

مستوی میں مربع ایک ایسی بند شکل ہے جو چار غیر ہم خط نقاط سے بنتی ہے اس کے چاروں اضلاع کی لمبائی برابر اور ہر زاویہ 90° کا ہوتا ہے۔

مستطیل (Rectangle)

مستوی میں ایک ایسی بند شکل جو چار غیر ہم خط نقاط سے بنتی ہے مستطیل کہلاتی ہے اگر اس کے

(i) آمنے سامنے کے اضلاع لمبائی میں برابر ہوں۔

(ii) آمنے سامنے کے اضلاع متوازی ہوں۔

(iii) ہر کونے پر زاویہ 90° کا ہو۔

متوازی الاضلاع (Parallelogram)

مستوی میں چار غیر ہم خط نقاط سے بنائی ہوئی بند شکل متوازی الاضلاع کہلاتی ہے اگر

(i) شکل کے بالمقابل اضلاع کی لمبائی برابر ہو۔

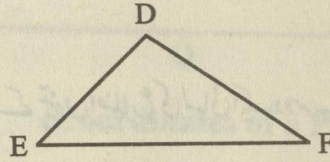
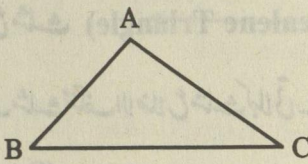
(ii) شکل کے بالمقابل اضلاع باہم متوازی ہوں۔

دو مثلثیں متماثل (علامت $\cong$) کہلاتی ہیں اگر ان کے درمیان کم از کم ایک (1-1) مطابقت ایسی قائم کی جا سکے جس میں باہم مطابقت رکھنے والے اضلاع اور زاویے متماثل ہوں۔ یعنی

اگر مطابقت $\Delta ABC \longleftrightarrow \Delta DEF$ میں

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ (تینوں متناظرہ اضلاع)

اور $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ (تینوں متناظرہ زاویے)

تو $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ض۔ز۔ض کا موضوعہ (S.A.S. Postulate)

دو مثلثوں کی دی ہوئی کسی مطابقت میں اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ دوسری مثلث کے متناظرہ دو اضلاع اور ان کے درمیانی زاویہ کے متماثل ہوں تو وہ مثلثیں متماثل ہوں گی۔

قطعہ خط کا عمودی ناصف (Perpendicular Bisector of a Line Segment)

ایک خط ℓ کسی قطعہ خط کا عمودی ناصف کہلاتا ہے اگر ℓ قطعہ خط پر عمود بھی ہو اور قطعہ خط کے وسطی نقطہ میں سے بھی گزرے۔

زاویہ کا ناصف (Bisector of an Angle)

اگر $\angle ABC$ کے اندر کوئی نقطہ P اس طرح واقع ہو کہ $\angle ABP = \angle PBC$ تو $\overrightarrow{BP}$ کو $\angle ABC$ کا ناصف کہتے ہیں۔ (یعنی $\overrightarrow{BP}$ زاویہ ABC کی تنصیف کرتی ہے)

دو ہم اکائی مقداروں a اور b کے درمیان نسبت کی تعریف $a:b = \frac{a}{b}$ کے طور پر کی جاتی ہے۔ یعنی ایسا عددی تعلق جو بتاتا ہے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کا کون سا حصّہ یا کتنے گُنا ہے۔ مقداریں a اور b نسبت $a:b$ کا پہلا اور دوسرا رکن (elements) کہلاتی ہیں۔ دو نسبتوں کے درمیان برابری کے تعلق کو تناسب کہتے ہیں۔ یعنی اگر $a:b = c:d$ تو مقداریں a, b, c اور d تناسب میں ہوں گی۔

متشابہ مثلثات (Similar Triangles)

دو مثلثیں متشابہ (علامت ~) کہلاتی ہیں اگر ان کے متناظرہ زاویے متماثل اور ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوں۔

ہم نقطہ خطوط (Concurrent Lines)

تین یا تین سے زیادہ خطوط ہم نقطہ کہلاتے ہیں اگر وہ ایک ہی نقطہ میں سے گذریں۔

مثلث کا محصور/اندرونی مرکز (Incentre)

کسی مثلث کے اندرونی زاویوں کے ناصف جس نقطہ پر ملتے ہیں اسے مثلث کا محصور/ اندرونی مرکز کہتے ہیں۔

مثلث کا محاصرہ مرکز (Circumcentre)

ایک مثلث کے محاصرہ مرکز سے مراد ایک ایسا نقطہ ہے جہاں مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

مثلث کا وسطانیہ (Median)

مثلث کا وسطانیہ ایک ایسا قطعہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے ایک راس کو بالمقابل (سامنے والے) ضلع کے وسطی نقطہ سے ملائے۔

مثلث کے کسی ایک راس سے گرایا ہوا قطعہ خط جو بالمقابل (سامنے والے) ضلع پر عمود ہوا سے مثلث کا ارتفاع کہتے ہیں۔

مثلث کا عمودی مرکز یعنی آرتھوسنٹر (Orthocentre)

مثلث کے عمودی مرکز یعنی آرتھوسنٹر سے مراد ایک ایسا نقطہ ہے جہاں پر مثلث کے تینوں عمود (ارتفاع) ہم نقطہ ہوتے ہیں۔

ریاضیاتی نشانات

علامت	مطلب
ڈگری	$^\circ$
پس یا نتیجہ	$\therefore$
اگرچہ / چونکہ	$\because$
پر عمود ہے	$\perp$
کے متوازی ہے	$\parallel$
مطابقت میں ہیں	$\longleftrightarrow$
تقریباً برابر ہے	$\approx$
کے منطبق ہے	$\cong$
کے متشابہ ہے	$\sim$
خط AB	$\overleftrightarrow{AB}$
قطعۂ خط AB	$\overline{AB}$
نقاط A اور B کے درمیان فاصلہ	$\lvert AB \rvert$
شعاع AB	$\overrightarrow{AB}$
مثلث ABC	ΔABC
زاویہ ABC	$\angle ABC$
قطعۂ خط AB کی لمبائی	$m\overline{AB}$
زاویہ ABC کی ڈگری	$m\angle ABC$
کے برابر ہے	$=$

علامت	مطلب
کے برابر نہیں ہے	$\neq$
تمام کے لیے	$\forall$
صرف اگر، تو	$\Rightarrow$
صرف اور صرف اگر، تو	$\Leftrightarrow$
جیسا کہ	$\mid$
سے بڑا ہے	$>$
سے چھوٹا ہے	$<$
سے بڑا نہیں ہے	$\ngtr$
سے چھوٹا نہیں ہے	$\nless$
سے بڑا ہے یا برابر ہے	$\geq$
سے چھوٹا ہے یا برابر ہے	$\leq$
کا رکن ہے	$\in$
غیر منفی جذر المربع	$\sqrt{}$
سو میں سے	$\%$
پائی	π
قالب A کا ٹرانسپوز	A^t
قالب A کا معکوس	A^{-1}
قالب A کا مقطع	det A or $\lvert A \rvert$
قالب A کا ایڈ جائنٹ	Adj A

چند الجبری فارمولے

* $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
* $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
* $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
* $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
* $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
* $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$
* $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
* $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$
* $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
* L.C.M. $\times$ H.C.F. $= p(x) \times q(x)$

لوگارتھم کے قوانین

* $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$
* $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
* $\log_a m^n = n \log_a m$
* $\log_a n = \log_b n \times \log_a b$

(Table of Logarithms) لوگارتھم ٹیبل

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	فرق والے کالم 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	**0086**	0128	0170						**4**	**9**	**13**	**17**	**21**	**26**	**30**	**34**	**38**
						0212	**0253**	**0294**	**0334**	**0374**	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**	**28**	**32**	**36**
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	15	19	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	16	20	23	26	30
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	17	20	23	26
15	**1761**	**1790**	**1818**	**1847**	**1875**						**3**	**6**	**9**	**11**	**14**	**16**	**20**	**23**	**26**
						1903	**1931**	**1959**	**1987**	**2014**	**3**	**6**	**8**	**11**	**14**	**17**	**19**	**22**	**24**
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	5	8	11	14	17	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	16	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	**3010**	**3032**	**3054**	**3075**	**3096**	**3118**	**3139**	**3160**	**3181**	**3201**	**2**	**4**	**6**	**8**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	**3979**	**3997**	**4014**	**4031**	**4048**	**4065**	**4082**	**4099**	**4116**	**4133**	**2**	**3**	**5**	**7**	**9**	**10**	**12**	**14**	**15**
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	**4771**	**4786**	**4800**	**4814**	**4829**	**4843**	**4857**	**4871**	**4886**	**4900**	**1**	**3**	**4**	**6**	**7**	**9**	**10**	**11**	**13**
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	**5441**	**5453**	**5465**	**5478**	**5490**	**5502**	**5514**	**5527**	**5539**	**5551**	**1**	**2**	**4**	**5**	**6**	**7**	**9**	**10**	**11**
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	**6021**	**6031**	**6042**	**6053**	**6064**	**6075**	**6085**	**6096**	**6107**	**6117**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	**6532**	**6542**	**6551**	**6561**	**6571**	**6580**	**6590**	**6599**	**6609**	**6618**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

(Table of Logarithms) لوگارتھم ٹیبل

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	فرق والے کالم 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	**6990**	**6998**	**7007**	**7016**	**7024**	**7033**	**7042**	**7050**	**7059**	**7067**	**1**	**2**	**3**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	**7404**	**7412**	**7419**	**7427**	**7435**	**7443**	**7451**	**7459**	**7466**	**7474**	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**5**	**6**	**7**
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	**7782**	**7789**	**7796**	**7803**	**7810**	**7818**	**7825**	**7832**	**7839**	**7846**	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**	**6**	**6**
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	**8129**	**8136**	**8142**	**8149**	**8156**	**8162**	**8169**	**8176**	**8182**	**8189**	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**	**6**	**6**
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	4	4	5	6	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	6	6
68	8325	8331	8339	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	5	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	6426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	5	5	6
70	**8451**	**8457**	**8463**	**8470**	**8476**	**8482**	**8488**	**8494**	**8500**	**8506**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**	**6**
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8696	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8730	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	**8751**	**8756**	**8762**	**8768**	**8774**	**8779**	**8785**	**8791**	**8797**	**8802**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**5**	**5**
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	**9031**	**9036**	**9042**	**9049**	**9053**	**9058**	**9063**	**9069**	**9074**	**9079**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**5**
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	**9294**	**9299**	**9204**	**9309**	**9315**	**9320**	**9325**	**9330**	**9335**	**9340**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**5**
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	**9542**	**9547**	**9552**	**9557**	**9562**	**9566**	**9571**	**9576**	**9581**	**9586**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9603	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	8768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	**9777**	**9782**	**9786**	**9791**	**9795**	**9800**	**9805**	**9809**	**9814**	**9818**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

(Table of Antilogarithms) اینٹی لوگارتھم ٹیبل

											فرق والے کالم								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	**1000**	**1002**	**1005**	**1007**	**1009**	**1012**	**1014**	**1016**	**1019**	**1021**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**
.01	1023	1026	1027	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	**1122**	**1125**	**1127**	**1130**	**1132**	**1135**	**1138**	**1140**	**1143**	**1143**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	**1259**	**1262**	**1265**	**1268**	**1271**	**1274**	**1276**	**1279**	**1282**	**1285**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	**1413**	**1416**	**1419**	**1422**	**1426**	**1429**	**1432**	**1435**	**1439**	**1442**	**0**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.20	**1585**	**1589**	**1592**	**1596**	**1600**	**1603**	**1607**	**1611**	**1614**	**1618**	**0**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1652	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1690	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1730	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1770	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	**1778**	**1782**	**1786**	**1791**	**1795**	**1799**	**1803**	**1807**	**1811**	**1816**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1944	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.30	**1995**	**2000**	**2004**	**2009**	**2014**	**2018**	**2023**	**2028**	**2032**	**2037**	**0**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**	**4**
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.34	2188	2193	2198	2103	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	1	2	3	3	3	3	5
.35	**2239**	**2244**	**2249**	**2254**	**2259**	**2265**	**2270**	**2275**	**2280**	**2286**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**5**
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	**2512**	**2518**	**2523**	**2529**	**2535**	**2541**	**2547**	**2553**	**2559**	**2564**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**	**5**
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	**2818**	**2825**	**2831**	**2838**	**2844**	**2851**	**2858**	**2864**	**2871**	**2877**	**1**	**1**	**2**	**3**	**3**	**4**	**5**	**5**	**6**
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

(Table of Antilogarithms) اینٹی لوگارتھم ٹیبل

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	فرق والے کالم								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	**3162**	**3170**	**3177**	**3184**	**3192**	**3199**	**3206**	**3214**	**3221**	**3228**	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**	**6**	**7**
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	**3548**	**3556**	**3565**	**3573**	**3581**	**3589**	**3597**	**3606**	**3614**	**3622**	**1**	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**7**
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	**3981**	**3990**	**3999**	**4009**	**4018**	**4027**	**4036**	**4046**	**4055**	**4064**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**6**	**7**	**8**
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	**4467**	**4477**	**4487**	**4498**	**4508**	**4519**	**4529**	**4539**	**4550**	**4560**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4768	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	**5012**	**5023**	**5035**	**5047**	**5058**	**5070**	**5082**	**5093**	**5105**	**5117**	**1**	**2**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**11**
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	**5623**	**5636**	**5649**	**5662**	**5675**	**5689**	**5702**	**5715**	**5728**	**5741**	**1**	**3**	**4**	**5**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	**6310**	**6324**	**6339**	**6353**	**6368**	**6383**	**6397**	**6412**	**6427**	**6442**	**1**	**3**	**4**	**6**	**7**	**9**	**10**	**12**	**13**
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	**7079**	**7096**	**7112**	**7129**	**7145**	**7161**	**7178**	**7194**	**7211**	**7228**	**2**	**3**	**5**	**7**	**8**	**10**	**12**	**13**	**15**
.86	7244	7261	7287	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	**7943**	**7962**	**7980**	**7998**	**8017**	**8035**	**8054**	**8072**	**8091**	**8110**	**2**	**4**	**6**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	**8913**	**8933**	**8954**	**8974**	**8995**	**9016**	**9036**	**9057**	**9078**	**9099**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**15**	**17**	**19**
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

انڈیکس

الف

ب

پ

ت، ٹ، ث

ج، چ، ح، خ

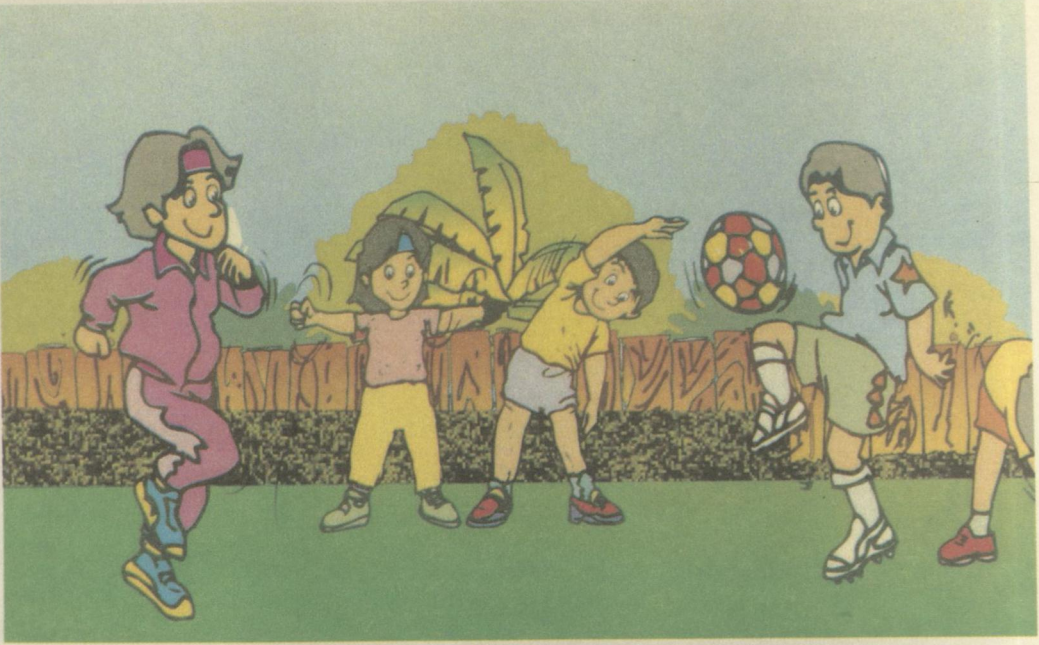
د، ڈ، ذ، ر، ڑ

ص، ض

ع، غ

ف، ق

کتابیات

- Gustafson, R. David and Frisk, P. D; Functions and Graphs, Brooks / Cole Publishing Company, 1987, U.S.A.
- H. Anton; Calculus with Analytic Geometry, (Second Edition), John Wiley & Sons, New York.
- H.S. Hall and F.H. Stevens; A School Geometry, (Metric Edition, 2006) A.I.T.B.S., Publishers, India.
- Jerome E. Kaufmann; Algebra for College Students, (2nd Edition, 1987), PWS-KENT Pb. Co. Boston.
- Joseph N. Payne; Algebra Two with Trigonometry, (2nd Edition), Harcourt Brace Joranovich, INC.
- Karl J. Smith and P.J. Boyle; College Algebra, (3rd Edition, 1985), Brooks / Cole Publishing Co., California.
- L.D. Hoffmann and G.L Bradley; Calculus for Business and Life Science, (Sixth Edition), McGraw Hill, N.Y.
- L. Redford, A Vavra and S. Richlicki; (Technical Mathematics) Breton Publishers, U.S.A.
- Mark Dugopolski; Intermediate Algebra, (3rd Edition, 2000), McGraw–Hill Co.
- Pythagorean Theorem – from Wolfram Math World
- Shamshad Muhammad Lodhi (Late) & Others; Mathematics 9, 10, (5th Ed) Punjab Textbook Board, Lahore.
- Wikipedia, The Free Encyclopedia.

ورزش جسم کے لیے بہت ضروری ہے اس سے انسان سارا دن چست رہتا ہے۔

ہاتھوں اور پاؤں کی صفائی کا خاص خیال رکھیں۔ ناخنوں کو وقت پر تراشتے رہنا چاہیے تاکہ ان میں میل جمع نہ ہو۔

ٹیکسٹ بک ڈویلپرز گروپ، لاہور کے ممبر پبلشرز کی نصابی کتب جو پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ، لاہور/وفاقی وزاتِ تعلیم (شعبہ نصاب سازی) اسلام آباد بمطابق قومی نصاب ۲۰۰۶ اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی ۲۰۰۷ کے تحت منظور شدہ ہیں اور جن کو این او سی حاصل ہو چکے ہیں۔

2-Kachehri Road, Lahore (Pakistan)
Ph: 042-37122955,-37352296,-37212091
E-mail: caravanbookslhr@gmail.com
cbh.pakistan +92-3374645800 cbhpakistan cbhpakistan